506.46
S243

Q
65
S24
NH

Q
65
S24
NH

506.46
S243

ANALES

DE LA

Facultad de Ciencias

DE ZARAGOZA

Se publican por trimestres, en los meses de Marzo, Junio, Septiembre y Diciembre

AÑO I. — JUNIO. — NÚM. 2

SUMARIO

Matemática.—Nota sobre fracciones racionales. —*F. Correa.*—Punto notable asociado á un punto de una cónica. *M. Stuyvaert.*—Sobre dos integrales definidas. *C. Pompeiu.*—Cuestiones propuestas.
Mecánica.—Algunas observaciones sobre la teoría de centros de gravedad. *J. Hatzidakis.*
Física.—Sobre algunos fenómenos de polarización. —*E. Terradas.*
Química.—Influencia de la forma de las masas líquidas que fermentan, en la cantidad de alcohol producido y en la duración del fenómeno. *A. Gregorio Rocasolano.*
Historia Natural.—Ornitología de Aragón. *L. Navás. S. J.*—Teruelitas del Museo de Historia Natural de Zaragoza. *P. Ferrando.*
Meteorología.—Estudio preliminar del clima de Zaragoza. *G. Silván.*—Observaciones meteorológicas del 2.º trimestre. *J. A. Izquierdo.*
Bibliografía. Publicaciones recibidas. Crónica

Precio de suscripción. { España. . . 1 año 8 pesetas. Extranjero. 1 íd. 10 francos.

La correspondencia administrativa á D. ANTONIO SANZ, D. Alfonso I, 20, librería

506.46

ZARAGOZA
ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO DE EMILIO CASAÑAL, COSO, 100
1907

NOV 8
National Museum

Anales de la Facultad de Ciencias

DIRECTOR

D. PAULINO SAVIRÓN, *Decano de la Facultad.*

SECRETARIO DE REDACCIÓN

D. JOSÉ RIUS Y CASAS, *Secretario de la Facultad.*

SEÑORES PROFESORES DE LA FACULTAD DE CIENCIAS DE ZARAGOZA

ALVAREZ Y UDE (José Gabriel).—Catedrático de Geometría descriptiva y Geometría de la posición.
ARÉVALO Y CARRETERO (Celso).—Auxiliar de Historia Natural.
BOZAL Y OBEJERO (Eduardo).—Auxiliar de Física.
CALAMITA Y ALVAREZ (Gonzalo).—Catedrático de Química orgánica.
FERRANDO Y MÁS (Pedro).—Catedrático de Historia natural.
GALÁN Y RUIZ (Gabriel).—Catedrático de Astronomía y Cosmografía.
G. DE GALDEANO (Zoel).—Catedrático de Cálculo infinitesimal.
GREGORIO Y ROCASOLANO (Antonio de).—Catedrático de Química general.
IZQUIERDO Y GÓMEZ (J. Antonio).—Catedrático de Física y Cristalografía.
LAFIGUERA Y LEZCANO (Luis).—Auxiliar de Geometría.
LOBO Y GÓMEZ (Ruperto).—Auxiliar de Química.
MARCO Y MONTÓN (Juan).—Auxiliar de Mecánica y Astronomía.
RIUS Y CASAS (José).—Catedrático de Análisis matemático, 1.º y 2.º curso.
SAVIRÓN Y CARAVANTES (Paulino).—Catedrático de Química inorgánica y Análisis químico.
SILVÁN Y GONZÁLEZ (Graciano).—Catedrático de Geometría analítica y Geometría métrica.
YOLDI Y BEREAU (Francisco).—Auxiliar de Química.

ANALES DE LA FACULTAD DE CIENCIAS
DE ZARAGOZA

AÑO I JUNIO DE 1907 NÚM. 2

Nota sobre fracciones irracionales.

Las fracciones de que vamos á ocuparnos, son aquellas que á lo más tienen dos radicales en su denominador, suponiendo también que son del mismo grado y que los factores que puedan afectarles, están bajo dichos signos, ya que en caso contrario se conoce el procedimiento para conseguirlo.

1.º Veamos de transformar la expresión

$$\frac{M}{\sqrt[m]{X} - \sqrt[m]{Y}},$$

en otra que no contenga radicales en su denominador.

Sabido es que

$$x^m - y^m = (x - y) \sum_{n=1}^{m=n} y^{n-1} x^{m-n}$$

y si se hace ahora

$$x = \sqrt[m]{X} \qquad \text{é} \qquad y = \sqrt[m]{Y},$$

se transforma la igualdad anterior en

$$X - Y = \left(\sqrt[m]{X} - \sqrt[m]{Y}\right) \sum_{n=1}^{n=m} \sqrt[m]{Y^{n-1} X^{m-n}}.$$

Luego si se multiplican los dos términos de la expresión propuesta por el factor polinomio que indica el signo sumatorio, se tendrá

$$\frac{M}{\sqrt[m]{X} - \sqrt[m]{Y}} = \frac{M}{X - Y} \sum_{n=1}^{n-m} \sqrt[m]{Y^{n-1} X^{m-n}};$$

que es la transformación que se busca.

En el caso de que sea $Y = 1$ será

$$\frac{M}{\sqrt[m]{X} - 1} = \frac{M}{X - 1} \sum_{n-1}^{n=m} \sqrt[m]{X^{m-n}};$$

dando origen á una expresión análoga, si en lugar de suponer Y igual á 1 se supusiera $X = 1$.

2.° La expresión

$$\frac{M}{\sqrt[m]{X} + \sqrt[m]{Y}},$$

se transforma análogamente, pero hay que tener en cuenta que m sea par ó impar, pues en el primer caso

$$x^m - y^m = (x + y) \sum_{n=1}^{m=n} (-1)^{n-1} y^{n-1} x^{m-n},$$

y en el segundo

$$x^m + y^m = (x + y) \sum_{n=1}^{n=m} (-1)^{n-1} y^{n-1} x^{m-n}.$$

Siguiendo la misma marcha que antes, será cuando sea m par,

$$\frac{M}{\sqrt[m]{X} + \sqrt[m]{Y}} = \frac{M}{X - Y} \sum_{n=1}^{n=m} (-1)^{n-1} \sqrt[m]{Y^{n-1} X^{m-n}}$$

y cuando sea m impar,

$$\frac{M}{\sqrt[m]{X} + \sqrt[m]{Y}} = \frac{M}{X + Y} \sum_{n=1}^{n=m} (-1)^{n-1} \sqrt[m]{Y^{n-1} X^{m-n}}.$$

3.° Bueno será hacer constar que cuando en el denominador no entre más que un radical, se puede hacer uso de las transformaciones halladas, ya que si el denominador es

$$U \mp \sqrt{Y},$$

será

$$U \mp \sqrt[m]{Y} = \sqrt[m]{U^m} \mp \sqrt[m]{Y} = \sqrt[m]{X} \mp \sqrt[m]{Y};$$

haciendo para simplificar

$$U^m = X.$$

4.° Tomemos como ejemplo la transformación de la fracción

irracional expresada por el segundo miembro de la igualdad

$$\varphi(z) = \frac{M}{\sqrt[m]{az + b} - h};$$

siendo M, a, b y h constantes, z la variable independiente y no conteniendo el denominador más que un solo radical.

Dividiendo por h ambos términos de la fracción y haciendo

$$\frac{a}{h^m} = p \qquad \text{y} \qquad \frac{b}{h^m} = q,$$

fácilmente hallaremos que

$$\varphi(z) = \frac{M}{h} \cdot \frac{1}{\sqrt[m]{pz + q} - 1}$$

y aplicando la transformación del primer párrafo

$$\varphi(z) = \frac{M}{h} \cdot \frac{1}{pz + q - 1} \sum_{n=1}^{n=m} \sqrt[m]{(pz + q)^{m-n}}$$

y también

$$\varphi(z) = \frac{M}{h} \sum_{n=1}^{n=m} \frac{(pz + q)^{\frac{m-n}{m}}}{pz + q - 1}.$$

5.º Hagamos ahora una aplicación de la transformación del ejemplo anterior á la integral expresada por el segundo miembro de la igualdad

$$W = \int \varphi(z)\, dz$$

ó sea

$$W = \frac{M}{h} \sum_{n=1}^{n=m} \int \frac{(pz + q)^{\frac{m-n}{m}}}{pz + q - 1}\, dz,$$

poniendo al mismo tiempo el signo integral bajo el signo sumatorio.

A fin de efectuar la integración con más facilidad, cambiemos de variable, haciendo

$$pz + q = t,$$

de donde

$$dz = \frac{dt}{p},$$

y así tendremos ahora que

$$W = \frac{M}{ph} \sum_{n=1}^{m=n} \int (t-1)^{-1} t^{\frac{m-n}{m}} dt.$$

Haciendo uso de la integración por partes

$$\int (t-1)^{-1} t^{\frac{m-n}{m}} dt = \frac{m}{2m-n} [(t-1)^{-1} t^{\frac{2m-n}{m}} + \int (t-1)^{-2} t^{\frac{2m-n}{m}} dt]$$

$$\int (t-1)^{-2} t^{\frac{2m-n}{m}} dt = \frac{m}{3m-n} [(t-1)^{-3} t^{\frac{3m-n}{m}} + 2\int (t-1)^{-3} t^{\frac{m-n}{m}} td]$$

$$\int (t-1)^{-3} t^{\frac{3m-n}{m}} dt = \frac{m}{4m-n} [(t-1)^{-4} t^{\frac{4m-n}{m}} + 3\int (t-1)^{-4} t^{\frac{4m-n}{m}} td].$$

Efectuando una serie de substituciones se hallará el desarrollo de la integral propuesta, el cual podrá expresarse abreviadamente por el segundo miembro de la igualdad

$$\int (t-1)^{-1} t^{\frac{m-n}{m}} dt =$$

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} \frac{(\alpha-1)!\, m^{\alpha}}{(2m-n)(3m-n)\ldots((\alpha+1)m-n)} (t-1)^{-\alpha} t^{\frac{(\alpha+1)m-n}{m}}$$

conviniendo en que para $\alpha = 1$, se considere como no existiendo $(\alpha - 1)!$

Substituyendo esta integral en el valor de W, deshaciendo luego el cambio de variable y reemplazando p y q por sus valores hallaremos finalmente

$$\int \frac{M}{\sqrt[m]{az+b} - h} dz =$$

$$\frac{M}{ah} \sum_{n=1}^{m=n} \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} \frac{(\alpha-1)!\, m^{\alpha} h^{m}}{(2m-n)(3m-n)\ldots((\alpha+1)m-n)} \cdot \frac{(az+b)^{\frac{(\alpha+1)m-n}{m}}}{(az+b-h^{m})^{\alpha}}.$$

Es claro que hemos podido llegar á este resultado, por haber hecho uso de la transformación indicada al principio de esta nota.

F. Correa,
Catedrático del Instituto de Zaragoza.

Zaragoza, 8 Abril 1907.

PUNTO NOTABLE ASOCIADO A UN PUNTO DE UNA CÓNICA

Es conocido el teorema siguiente: «Si desde dos puntos A, B se trazan las tangentes (reales ó imaginarias) á una cónica Γ, los cuatro puntos de contacto y los dos puntos A, B están en una misma cónica» (*).

Recíprocamente, sean P, Q los puntos de contacto de las tangentes trazadas desde A; toda cónica que pase por APQ corta á la cónica Γ en otros dos puntos y pasa por la intersección de las tangentes trazadas á Γ en estos dos últimos puntos. Propiedad que resulta inmediatamente del teorema directo y del hecho de que cinco puntos bastan para determinar una cónica.

En particular, el círculo circunscrito al triángulo APQ corta á Γ en dos puntos M, N y pasa por el punto S intersección de las tangentes á Γ en M y N; en ese círculo el punto A es diametralmente opuesto al de encuentro de las normales en P y Q. Si estos últimos puntos se acercan indefinidamente el uno al otro, el límite del círculo circunscrito al triángulo APQ es el que tiene por diámetro el radio de curvatura en el punto A de la cónica Γ. Tenemos así el teorema:

El círculo que tiene por diámetro el radio de curvatura en un punto de una cónica Γ, *corta además á la curva en dos puntos* M, N *y pasa por el punto* S *polo de la recta* MN *respecto de la cónica* Γ.

A todo punto A de la cónica corresponde, pues, un cierto punto S del plano. Sea

$$ax^2 + 2hxy + by^2 - 2y = 0 \qquad (1)$$

la ecuación de la cónica Γ referida á la tangente y la normal en A. El radio de curvatura es $\frac{1}{a}$, y el círculo descrito sobre este radio de curvatura como diámetro tiene por ecuación

$$ax^2 + ay^2 - y = 0. \qquad (2)$$

(*) Véase p. ej : H. MANDART.—*Cours de Géométrie analytique*, Namur 1904, p. 451.

Si P, Q son los puntos de contacto de las tangentes que pasan por A, y R, S los de las que pasan por B, el haz $A.\ PQRS$... es proyectivo con la serie de sus polos, y como ésta es precisamente sección del haz $B.\ PQRS$... con la secante PQ, esos dos haces son proyectivos y engendran una cónica que contiene los seis puntos dichos.

N. T.

Restando las (1) y (2) se obtiene

$$y\,[(a-b)\,y-2hx+1]=0.$$

Como $y=0$ representa la tangente común en A

$$(a-b)\,y-2hx+1=0, \tag{3}$$

representa la recta que une los otros dos puntos M, N comunes al círculo y á la cónica. Sea (x', y') el polo S de esa recta MN, dado por consiguiente por las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} hx'+ay'-1&=0\\ ax'-hy' \quad\;\; &=0\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

De estas dos rectas determinantes de S, la primera pasa por el centro de curvatura en A y es perpendicular á la segunda en el punto S estudiado; la segunda es la simétrica, con relación á la normal, de la recta $ax+hy=0$, es decir, del diámetro de la cónica Γ que pasa por A.

Luego: *si se traza, en un punto* A *de una cónica, la recta simétrica del diámetro en este punto respecto de la normal, esa recta pasa por el punto* S *correspondiente al punto* A; *además el segmento* AS *es la proyección ortogonal del radio de curvatura en* A.

La primera de las rectas (4), que pasa por S y por el centro de curvatura, encuentra al eje de las x, es decir, á la tangente en A, en el mismo punto C que el diámetro

$$hx+by-1=0,$$

conjugado con la normal. De esta advertencia y del teorema precedente se deduce una construcción sencilla del punto S y del centro de curvatura en A (*).

Como cuestiones que se refieren á lo estudiado señalamos al lector las dos siguientes:

1.ª Buscar el lugar del punto S cuando A describe una elípse, una hipérbola ó una parábola.

2.ª Estudiar en general la correspondencia entre los puntos A y S.

M. Stuyvaert.
Gand (Belgique).

Por la traducción,
G. Silván.

(*) Esa construcción, por ser dicho punto C polo de la normal en A, es un caso particular de la construcción más general indicada en la *Geometría de la Posición* de D. Eduardo Torroja, p. 687, problema 2.º —N. T.

Sobre dos integrales definidas.

Se cita ordinariamente, en los tratados clásicos, las integrales

$$A = \int_0^1 \frac{\log x}{1 - x}\, dx, \qquad B = \int_0^1 \frac{\log x}{1 + x}\, dx,$$

como ejemplo de integrales definidas cuyo cálculo exige el desarrollo en serie de la función afectada del signo integral; además, esto supone conocida la suma de la serie

$$S_2 = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2}.$$

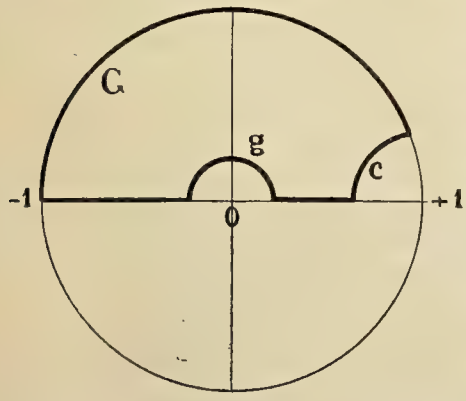
Pero el cálculo de las integrales A y B puede hacerse directamente, por el *método de los residuos*, y aplicarse á la sumación de la serie S_2.

He aquí este cálculo.

Se parte de la función de variable compleja

$$\frac{\log z}{1 - y}$$

que se integra, en el sentido directo, á lo largo del contorno de un semicírculo situado encima del eje real, que tiene como centro el punto $y = 0$ y como diámetro el segmento comprendido entre los puntos -1 y $+1$, salvando el punto $y = 0$ por medio de una semicircunferencia (g) de radio ε y el punto $+1$ por medio de un cuadrante de círculo (c) de radio η, de manera que los dos puntos $y = 0$ y $y = +1$ queden fuera del contorno de integración.



Designando por (Γ) el contorno así definido, se tiene

$$J = \int_{(\Gamma)} \frac{\log z}{1 - z}\, dy = 0, \qquad (1)$$

puesto que en el interior y sobre el contorno (Γ), la función

$$\frac{\log z}{1 - y}$$

es holomorfa. Se hace, para fijar las ideas, el convenio siguiente sobre la determinación del logaritmo: *log* z *es real cuando* z *es real y positivo.*

Supuesto así, volvamos á la igualdad (1). El contorno (Γ) se compone:

1.°) Del segmento $\overline{-1, -\varepsilon}$
2.°) De la semicircunferencia (g).
3.°) Del segmento $\overline{+\varepsilon, 1-\eta}$.
4.°) Del cuadrante de circunferencia (c).
5.°) Por último, del contorno (G).

1.° Sobre el segmento $-1, -\varepsilon$, se tiene

$$y = \rho e^{i\pi};$$

luego

$$J_1 = \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{\log z}{1-y}\, dz = \int_{+\varepsilon}^{+1} \frac{\log \rho + i\pi}{1+\rho}\, d\rho.$$

2.° La integral

$$J_2 = \int_{(g)} \frac{\log z}{1-z}\, dy,$$

tiende á cero al mismo tiempo que el radio ε del semicírculo g. [Tisserand et Painlevé: *Exercices sur le Calcul infinitésimal*, pág. 443].

3.° Sobre el segmento $\overline{+\varepsilon, 1-\pi}$ se tiene

$$J_3 = \int_{+\varepsilon}^{1-\eta} \frac{\log x}{1-x}\, dx.$$

4.° La integral

$$J_4 = \int_{(c)} \frac{\log z}{1-z}\, dy,$$

tiende también hacia cero al mismo tiempo que el radio η del cuadrante (c). [Tisserand et Painlevé: *loc. cit.*].

5.° Por último, la integral $\int_G$ puede escribirse

$$J_5 = \int_G \frac{\log z}{1-z}\, dz = -\int_{\eta'}^{\pi} \frac{\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta}\, \theta d\theta$$

poniendo $z = \rho e^{i\theta}$ y observando que sobre (G) se verifica $\rho = 1$.

Pasando ahora, al límite, haciendo $\varepsilon = 0$ y $\eta = 0$, se tendrá también $\eta' = 0$ y la integral (1) será

$$J = \lim J_1 + \lim J_3 + \lim J_5$$

$$(1') \quad 0=\int_0^1 \frac{\log \varrho + i\pi}{1+\varrho}\, d\varrho + \int_0^1 \frac{\log x}{1-x}\, dx - \int_0^\pi \frac{\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta}\,\theta d\theta$$

Separemos, en la primera y en la última integral, las partes reales de las imaginarias. Se obtiene, tomando las partes reales, en (1′),

$$\int_0^1 \frac{\log x}{1-x}\, dx + \int_0^1 \frac{\log x}{1+x}\, dx + \frac{1}{2}\int_0^\pi \theta d\theta .$$

Como la última integral es igual á $\frac{\pi^2}{4}$ se deduce

$$(2) \qquad \int_0^1 \frac{\log x}{1-x}\, dx + \int_0^1 \frac{\log x}{1+x}\, dx = -\frac{\pi^2}{4}.$$

Observemos, ahora, que

$$\int_0^1 \frac{\log x}{1-x}\, dx - \int_0^1 \frac{\log x}{1+x}\, dx = 2\int_0^1 \frac{x \log x}{1-x^2}\, dx ,$$

y

$$2\int_0^1 \frac{u \log u}{1-u^2}\, du = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\log x}{1-x}\, dx ,$$

poniendo $x = u^2$ como variable de sumación; luego

$$\int_0^1 \frac{\log x}{1-x}\, dx - \int_0^1 \frac{\log x}{1+x}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\log x}{1-x}\, dx ,$$

de donde

$$(3) \qquad \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\log x}{1-x}\, dx = \int_0^1 \frac{\log x}{1+x}\, dx .$$

De las ecuaciones (2) y (3) sale enseguida,

$$\int_0^1 \frac{\log x}{1-x}\, dx = -\frac{\pi^2}{6}; \quad \int_0^1 \frac{\log x}{1+x}\, dx = -\frac{\pi^2}{12}.$$

De la primera integral se deduce fácilmente

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$$

resultado que se obtiene, además, siguiendo otros caminos.

C. Pompeiu,
Maestro de Conferencias en la
Universidad de Jassy.

Algunas observaciones sobre la teoría de centros de gravedad.

1. Generalización de las fórmulas de Guldin y de Pappus.

a) Si una curva plana *no homogénea* $[\overline{\omega} = \sigma\,(x,y)]$ gira alrededor de un eje situado en su plano, se tendrá, designando por M_s la masa de la superficie engendrada,

$$M_s = 2\pi \int_a^b \overline{\omega} y\, ds.$$

Por otra parte, se tiene, para la ordenada Y_1 del centro de gravedad de la curva considerada,

$$M_c Y_1 = \int_a^b \overline{\omega} y\, ds, \quad (*)$$

designando por M_c la masa de la curva. *De cuyas expresiones se deduce*

$$M_s = M_c \,.\, 2\pi Y_1.$$

La masa (ó el peso) de una superficie de revolución, es igual á la masa (ó el peso) de la curva meridiana que la engendra, multiplicada por la circunferencia descrita por el centro de gravedad de la curva.

b) Si un área plana gira alrededor de un eje situado en su plano y *su densidad es de la forma* $\overline{\omega} = \sigma\,(x)$, el volumen engendrado tendrá la masa

$$M_v = \pi \int_a^b \overline{\omega}\,(y_2^2 - y_1^2)\, dx.$$

Por otra parte, la ordenada Y_1 del centro de gravedad del área, es dada por la expresión

$$M_s\, Y_1 = \frac{1}{2} \int_a^b \overline{\omega}\,(y_2^2 - y_1^2)\, dx, \quad (**)$$

siendo M_s la masa del área dada. *Se tendrá por consiguiente*

$$M_v = M_s \,.\, 2\pi\, Y_1.$$

(*) Véase Graindorge.—*Mecánica analítica.*—París, 1888, tomo I, cap. VI.
(**) Véase Graindorge.—*Mecánica analítica* —París, 1888, tomo I, cap. VI.

La masa (ó el peso) de un volumen de revolución es igual á la masa (ó el peso) del área que lo engendra, multiplicada por la circunferencia descrita por el centro de gravedad del área.

Haciendo en (*a*) y (*b*), $\overline{\omega} =$ const, se tienen los teoremas de *Guldín* y de *Pappus*.

La generalización de los teoremas (*a*) y (*b*) para un ángulo de rotación $\delta < 2\pi$ y más generalmente, para la rodadura sobre una desarrollable, se hará evidentemente de la misma manera que para los teoremas de *Guldín* y de *Pappus* (*).

2. Sobre una propiedad de los centros de gravedad.

Designando por $\overline{\omega}$ la densidad de una figura no homogénea, se tienen las fórmulas

$$MX_1 = \int_{(f)} \overline{\omega} x dv, \quad MY_1 = \int_{(f)} \overline{\omega} y dv, \quad MZ_1 = \int_{(f)} \overline{\omega} z dv,$$

$$M = \int_{(f)} \overline{\omega} dv. \quad (**)$$

Supongamos que la densidad sea de la forma

$$\overline{\omega} = \frac{1}{Ax + By + Cz},$$

es decir, *inversamente proporcional á la distancia del punto á un plano fijo.*

Se tendrá

$$M = \frac{\int_{(f)} dv}{AX_1 + BY_1 + Cz_1} = \frac{\varepsilon}{AX_1 + BY_1 + CZ_1},$$

donde ε representa la extensión (longitud, área ó volumen) de la figura. Por tanto:

La masa de toda figura, cuya densidad es $\overline{\omega} = \frac{1}{Ax + By + Cz}$, *es igual á la extensión de la figura, multiplicada por el factor constante* $\frac{1}{AX_1 + BY_1 + CZ_1}$, *es decir, igual á la masa de la misma figura supuesta homogénea y de una densidad* $\frac{1}{AX_1 + BY_1 + CZ_1}$

(*) Se atribuye á menudo, pero yo creo ser falso, el teorema relativo á los volúmenes á *Guldín. Pappus* en su colección (ed Hultsch. V. II, p. 682, Bezol 1877), lo anuncia claramente. (Ver tambien: Cantor, Geschichte der Mathematik, I, p. 421).

(**) Ruiz Castizo.—*Mecánica racional.* Tomo 1.º, fascículo 1.º, cap. IV.—Madrid, 1907. —Graindorge.—*Mecánica anatilica* —Tomo I.

igual á la densidad de la figura primitiva en el centro de gravedad. La misma proposición subsiste para los pesos.

3. Sobre el diámetro «baricéntrico».

La proposición que dice «*si un sólido tiene un diámetro, sobre él está el centro de gravedad*» no es más que un caso especial de la siguiente:

«*Si un sólido tiene un diámetro baricéntrico, tendrá su centro de gravedad sobre este diámetro.*»

Designamos por *diámetro baricéntrico*, una recta sobre la cual se encuentran los centros de gravedad de las secciones paralelas á un plano fijo. Porque, llamando ε el área de una cualquiera de dichas secciones, se tendrá (tomado el diámetro baricéntrico para eje de las X):

$$VY_1 = \Sigma\,(\varepsilon + \alpha)\,\Delta x \cos \theta\beta,$$
$$VZ_1 = \Sigma\,(\varepsilon + \alpha)\,\Delta x \cos \theta\gamma,$$

siendo α, β, γ infinitamente pequeños, y como

$$\Sigma\,(\varepsilon + \alpha)\,\Delta x \cos \theta\beta \quad < B\Sigma\,(\varepsilon + \alpha)\,\Delta x \cos \theta,$$

donde B representa la mayor de las β, y

$$\lim \left\{B\Sigma\,(\varepsilon + \alpha)\,\Delta x \cos \theta\right\} = 0$$

evidentemente, se concluye

$$Y_1 = 0 \quad \text{y} \quad Z_1 = 0 \qquad\qquad c.q.f.d.$$

El diámetro *geométrico* no es más que un caso especial del diámetro *baricéntrico*; basta que los *centros de gravedad* vengan á ser *centros de simetría.*

Se demuestra de la misma manera que: *si las secciones paralelas á un plano fijo, de un sólido cualquiera, tienen sus centros de gravedad sobre una línea plana, el centro de gravedad del sólido se encuentra sobre el plano de esta línea.*

4. Centro de gravedad de volúmenes de revolución.

Las fórmulas:

$$V = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\,dx, \qquad VX_1 = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\,x dx,$$

se transforman de la manera siguiente en coordenadas polares:

$$V = 2\pi \iint \rho^2 \operatorname{sen} \theta . d\rho . d\theta . = \frac{2}{3} \pi \int (\rho_2{}^3 - \rho_1{}^3) \operatorname{sen} \theta \cos \theta d\theta ,$$

$$VX_1 = 2\pi \iint \rho^3 \operatorname{sen} \theta \cos \theta d\rho d\theta = \frac{1}{2} \pi \int (\rho_2{}^4 - \rho_1{}^4) \operatorname{sen} \theta \cos \theta d\theta$$

en las que, el elemento de superficie que engendra el de volumen está formado en coordenadas polares, es decir, que la superficie que engendra el volumen ha sido dividida en elementos, por las curvas ρ = const y θ = const. Estas fórmulas pueden ser útiles, cuando la ecuación del ecuador está dada en coordenadas polares, y son más sencillas que las obtenidas expresando simplemente las (1) en coordenadas polares, es decir, reemplazando x é y por $\rho \cos \theta$ y $\rho \operatorname{sen} \theta$.

5. «Centro de pesos, «no» de gravedad».

El término comunmente empleado, de «*centro de gravedad*», no es muy exacto. Este punto es el *centro de fuerzas paralelas supuestas aplicadas á los distintos puntos de la figura,* es pues el *centro de los pesos de estos puntos,* ó también el *centro del peso total de la figura.* La gravedad, no es el peso de la figura, sino la *idea abstracta de la fuerza de atracción de la Tierra.* Además los griegos antiguos decían ya κεντρον βαρονς (y no κεντρον βαρνητος) y es del mismo modo como decimos aun hoy los griegos modernos.

N. J. Hatzidakis, Athenes.

Por la traducción,
Juan Marco Montón.

CUESTIONES PROPUESTAS.

1. Demostrar la convergencia de la serie doble

$$V = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(m+n)!}{m!} \frac{n^4}{(m+n)^{n+4}}. \quad (*)$$

L. Orlando.

2. Dos vasos A y A' cuyas capacidades respectivas son V y V' contienen: el primero una mezcla de a litros de vino y b litros de agua, y el segundo una mezcla de a' litros de vino y b' litros de agua. Se trasvasa de A' á A una cantidad de líquido suficiente para llenar A; luego se llena de modo análogo A' por medio de A; y en fin se llena otra vez A por medio de A'. Hallar las fórmulas que expresan entonces las cantidades de vino y de agua contenidas en cada vaso (**).

J. Gillet.

3. Se dan en un plano un ángulo XCY y un punto A. Por los puntos A y C se hacen pasar dos circunferencias; sean además E y F, G y H, los puntos en que cortan respectivamente á los lados del ángulo. Sobre CE y CH se construye el paralelógramo $ECHP$; sobre CF y CG se construye el paralelógramo $FCGQ$. Esto sentado: 1.° la recta PQ es perpendicular á la recta de Simson, relativa á los datos, es decir, correspondiente al punto A y á los triángulos ECH ó GCH; 2.° pasa por el punto de intersección de las cuerdas EF y GH (***).

E. Catalán.

(*) Cuestión 117 propuesta en la *Revista Trimestral de Matemáticas*, V, 1905, p. 192.

(**) Cuestión 159 propuesta en *El Progreso Matemático* (1) IV, 1894, p. 68. Cuestión 119 propuesta en la *Revista Trimestral de Matemáticas*, V, 1905, p. 192

(***) Cuestión 182 propuesta en *El Progreso Matemático* (1), IV, 1894, p. 158. Cuestión 123 propuesta en la *Revista Trimestral de Matemáticas*, V. 1905, p. 247.

Sobre algunos fenómenos de polarización.

I

En un estudio anterior (*) describimos el campo del microscopio petrográfico armado de polarizador, analizador y lente de Amici, cuando concentrada la luz por el condensador en un punto de la platina, se disponen en esta sucesivamente una lámina de cuarzo dextrogira ó levogira, una lámina de mica de un cuarto, un medio ó un octavo de longitud de onda y otra lámina de cuarzo del mismo espesor y signo que la primera. Seguía á la descripción de las curvas de brillantez y obscuridad, la explicación aproximada de algunos casos previamente descritos. Nos proponemos ahora explicar algunos más, completar ciertas fórmulas y rectificar algún error que pasó inadvertido.

En el estudio á que nos referimos antes, suponíamos conocida por el lector la teoría electro magnética de la polarización rotatoria; en el presente trabajo, supondremos al lector novicio en ella.

No sabemos que en castellano se halle en letras de molde explicación alguna de tan notable teoría, por esto no dudamos que ha de reportar alguna utilidad el exponerla, siquiera sea en lo que el autor conceptúa necesario para la inteligencia de la aplicación que de la misma hace á los fenómenos á que alude el título del presente estudio.

II

Supondremos que la luz (**) puede estar representada por un vec-

(*) *Anales de la Sociedad Española de Física y Química*, tomo V, núm. 44, y *Revista de la Academia de Ciencias*, tomo V, núm. 7.

(**) No sabemos lo que es la Luz, ni lo que es la Electricidad, pero si pudiéramos afirmar que una cosa y otra no son distintas, indudablemente habríamos adelantado mucho. Sería un bello ideal el referir las distintas formas de la energía á una sola, á la Electricidad, por ejemplo. Antiguamente se quería referir todo á la hipótesis mecánica. Aun hoy ciertos cultivadores de la Filosofía Natural, como Ludwig Boltzmann, asientan las hipótesis modernas de la Electricidad sobre bases mecánicas y viceversa, otros, explican la Mecánica, partiendo de bases eléctricas. Los primeros imaginan modelos y símiles mecánicos de los fenómenos eléctricos y magnéticos, los segundos modelos electromagnéticos de los fenómenos mecánicos. La misma termodinámica parece entrar de lleno en el sendero descubierto por Gibbs, y buscar interpretación de sus fórmulas en modelos mecánicos. Mas la ciencia adelanta muy despacio en estos derroteros. Muchos se contentan con modelos matemáticos de los fenómenos, modelos matemáticos que condensan en un sistema de ecuaciones diferenciales. Tal procedimiento es llamado «fenomenológico». En la mayor

tor. Así como al propagarse una onda en la superficie de un lago, conocida vectorialmente en todo instante la distancia de un punto geométrico que figure la posición de una partícula líquida en reposo á las diversas posiciones de la misma partícula cuando se propaga la perturbación, se puede decir que se conoce mecánicamente el movimiento ó deformación de la superficie y por tanto la propagación del movimiento ondulatorio, así en todo fenómeno luminoso el conocimiento del vector luz localizado en un punto del espacio dará idea de la propagación. Antiguamente era el vector luz la distancia de la molécula de éter en reposo á la molécula apartada de su posición de equilíbrio. En la teoría que vamos á exponer este vector tiene significación eléctrica.

III

Entre una masa $\left\{\begin{matrix}\text{eléctrica}\\ \text{magnética}\end{matrix}\right\}$ q y otra q' localizadas en dos puntos situados á una distancia r actúa una fuerza F

$$F = -K\frac{qq'}{r^2} \tag{1}$$

atractiva ó repulsiva según que q y q' tengan distinto ó igual signo; K es aquí una constante. Si hacemos $K = 1$, las dimensiones de q son $L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$. Definida la unidad de cantidad de electricidad como «aquella que actuando sobre otra igual, á un cm. la repele con la fuerza de una dina», se llama unidad electrostática de cantidad de electricidad Intensidad electrostática I se llama á la cantidad de electricidad que pasa en la unidad de tiempo, por una sección cualquiera de un conductor que pone en comunicación dos masas eléctricas de distinto signo y sus dimensiones serán $L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$. La intensidad magnética se define como la eléctrica.

Colocada una serie de masas $\left\{\begin{matrix}\text{eléctricas}\\ \text{magnéticas}\end{matrix}\right\}$ $q_1, q_2, q_3 \ldots$ en el interior de una superficie S, se llama «flujo al través de la misma», á la expresión

$$\int\left(\frac{q_1}{r_1^2}\cos\alpha_1 + \frac{q_2}{r_2^2}\cos\alpha_2 + \ldots\ldots\right)dS$$

en que $r_1, r_2 \ldots\ldots$ son las distancias de un punto de la superficie S á

---

parte de tratados de teoria electromagnética de la luz se sigue este camino. Se parte de las ecuaciones de Maxwell-Hertz, como á priori, por inducción, buscando en la experiencia la comprobación de la hipótesis de que el éter es tal, que en él, el campo de fuerzas eléctricas y magnéticas satisface las ecuaeiones citadas, como en Mecánica racional, se establece que el campo de fuerza está regido por las ecuaciones de Lagrange por ejemplo. Estúdiase así la propagación de ondas electromagnéticas en diversos medios y se hace la hipótesis de que las ondas electromagnéticas son ondas luminosas.

los diversos puntos donde se hallan localizadas las masas $q_1, q_2 \ldots\ldots$, y $\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots$ son los ángulos que la normal á la superficie S en el punto considerado, forma con las direcciones de $r_1, r_2 \ldots\ldots$ La expresión anterior vale $4\pi\Sigma q$; en efecto, llamando $d\omega$ al ángulo sólido bajo el cual se ve desde un punto donde se halla localizada una masa q el elemento dS, será

$$\int \Sigma \frac{q}{r^2} \cos \alpha dS = \int \Sigma q \omega = \Sigma q \int d\omega = \Sigma q \Omega = 4\pi \Sigma q.$$

Llamaremos fuerza $\left\{\begin{matrix}\text{eléctrica}\\ \text{magnética}\end{matrix}\right\}$ en un punto á la que se ejerce sobre la unidad de masa ó cantidad localizada en este punto y representaremos por $\left\{\begin{matrix}E\\ H\end{matrix}\right.$ la $\left\{\begin{matrix}\text{eléctrica}\\ \text{magnética}\end{matrix}\right.$. Así, la expresión del flujo eléctrico, por ejemplo, se podrá escribir, llamando E_n á la proyección sobre la normal á la superficie de la resultante de las fuerzas eléctricas en un punto,

$$-\int \Sigma E_1 \cos \alpha_1 \, dS = -\int E_n dS = 4\pi \Sigma q. \qquad (2)$$

Se conoce con el nombre de hoja magnética á una superficie en cuya normal se halla dispuesto un pequeño imán ó imán elemental, en que la distancia de los polos tiene un valor determinado, y por ejemplo, igual para todos los puntos, distancia que podemos llamar d. (Fig. 1).

El potencial de uno de estos imanes elementales en un punto P, será, puesto que el potencial de las acciones eléctrica ó magnética de una masa q es $W = \int \frac{-q}{r^2} dr = \frac{+q}{r}$, llamando V al de la hoja,

$$dV = -\left[\frac{q}{r''} - \frac{q}{r'}\right] = \frac{q(r'' - r')}{r'' r'}$$

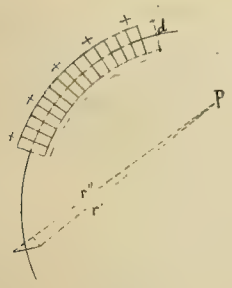


Fig. 1

y, atendiendo á la pequeñez de d, si llamamos r á la distancia del punto medio del imán elemental á P, y α al ángulo que la dirección de r forma con la normal

$$dV = \frac{q}{r^2} d \cos \alpha$$

y si la masa $+q$ del imán elemental la suponemos distribuída en la superficie a, y la $-q$ en la b con densidad superficial δ tal que $q = \delta dS$, tendremos, llamando ω al ángulo sólido bajo el cual se ve desde P el elemento dS,

$$V = \int \delta d \, d\omega = \delta d \Omega$$

siendo Ω el ángulo sólido bajo el cual se ve desde P el contorno de la hoja.

Consideraremos como positivo el ángulo sólido, cuando el punto P se halle delante de la cara —. Así, en la figura 2 el ángulo en P_1 es Ω y en P_2 del otro lado de la hoja pero muy cerca de P_1, se puede decir que es $-(4\pi - \Omega)$. Así, pues, el potencial en P_1 será $\Omega\delta d$, y el potencial en P_2 será $(4\pi - \Omega)\delta d$. De donde el trabajo realizado al pasar la masa magnética unidad de P_2 á P_1, trabajo que se mide por la diferencia de los valores del potencial en las posiciones final é inicial, será

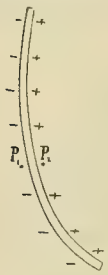


Fig. 2

$$4\pi\delta d$$

Si imaginamos materializado el contorno de la hoja por un hilo por el que circula una corriente de intensidad determinada Y, se ha comprobado que la acción de la hoja y de la corriente sobre un polo magnético unidad, son proporcionales, si se tiene

$$j d\delta = Y$$

siendo j un factor de proporcionalidad. Si suponemos $j = 1$, definiremos electromagnéticamente la intensidad Y, por la expresión $Y = d\delta$. Las dimensiones de Y son L [dim de q] L^{-2}, y si la q magnética tiene por dimensiones $L^{3/2} M^{1/2} T^{-1}$, suponiendo igual á la unidad el coeficiente K de la fórmula (1) de las acciones magnéticas, las dimensiones de Y serán $L^{1/2} M^{1/2} T^{-1}$. Recordando las de I, se tiene que el cociente $\frac{I}{Y}$ tiene por dimensiones LT^{-1}, es decir, las de una velocidad, que expresada numéricamente en el sistema $c.g.s$, es 3.10^{10} ó sea la velocidad de la luz.

Por lo que anteriormente hemos dicho, el trabajo realizado al atravesar el polo magnético unidad la hoja, ó al hacerle recorrer una curva cerrada que atraviese una sola vez la hoja, vale $4\pi\delta d$, ó si se trata de un circuito recorrido por una coriente eléctrica $Y = d\delta$ y cuya forma sea la del contorno de la hoja, el trabajo vendrá expresado por $4\pi Y$ ó $\frac{4\pi I}{C}$ siendo C la velocidad de la luz 3.10^{10}.

IV

Aunque la intensidad en diferentes secciones de un conductor sea la misma, la cantidad de electricidad por unidad de superficie normal que en la unidad de tiempo pasa por los distintos elementos dS de una sección cualquiera, es diferente, como es diferente la velocidad del agua en los distintos filetes fluídos que atraviesan la sección de un tubo en el que corre aquel líquido. Llamando α, β, γ, á los ángulos que la normal á un elemento dS de sección del conductor forma

con tres ejes coordenados, y I_x, I_y, I_z á las proyecciones del vector que en un punto de la sección representa la intensidad por unidad de superficie normal, se tendrá

$$I = \int (I_x \cos \alpha + I_y \cos \beta + I_z \cos \gamma)\, dS \tag{3}$$

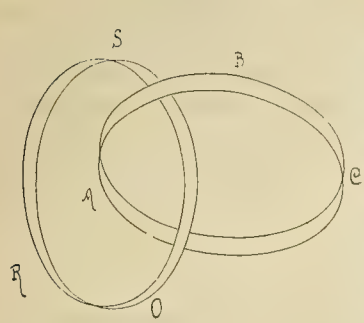


Fig. 3

Imaginemos un conductor en forma de anillo (Fig. 3), por el que circula una coriente I Si el polo magnético unidad recorre la curva ABC, el trabajo realizado al recorrerle una vez tiene por expresión $\int H \cos \varepsilon dl$, siendo dl un elemento de la curva ABC y ε el ángulo que la dirección de H forma con la tangente á la curva ABC en un punto cualquiera de la misma. Pero, por lo dicho en el párrafo anterior,

$$\int H \cos \varepsilon\, dl = 4\pi \frac{I}{C} = \frac{4\pi}{C} \int (I_x \cos \alpha + I_y \cos \beta + I_z \cos \gamma)\, dS,$$

estando la segunda integral referida á una superficie cuyo contorno es, por ejemplo, ABC, en lo cual no hay inconveniente, ya que como la curva ABC envuelve por completo al conductor ROS, en los puntos de la superficie que no pertenezcan al conductor, $I_x = I_y = I_z = 0$.

Por el teorema de Stokes,

$$\int H \cos \varepsilon\, dl =$$

$$\int \left[\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] dS$$

y, por consiguiente,

$$\frac{4\pi}{C} \int (I_x \cos \alpha + I_y \cos \beta + I_z \cos \gamma)\, dS =$$

$$\int \left[\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial 2} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial H_x}{\partial 2} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] dS$$

refiriéndose las dos integrales á la misma superficie. Ahora bien, la fórmula anterior es independiente de la magnitud de esta superficie luego

$$\frac{4\pi}{C} I_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z},$$

$$\frac{4\pi}{C} I_y = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x},$$

$$\frac{4\pi}{C} I_z = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y},$$

vectorialmente se escriben generalmente las tres ecuaciones simbólicamente así

$$\frac{4\pi \bar{I}}{C} = \text{curl } H \tag{4}$$

Si no hubiera corriente en el conductor ROS, aparecería en virtud del trabajo realizado al hacer recorrer al polo unidad la curva ABC. Desde luego, la suma de los dos trabajos tiene que ser nula por el principio de la conservación de la energía. En cuanto al trabajo realizado al describir el polo la curva AOB vale $4\pi \frac{I}{C}$, y si se tratara de una masa magnética q, valdría

$$4\pi q \frac{I}{C}.$$

En cuanto al trabajo realizado al recorrer $ROSR$, la cantidad de electricidad It, valdrá evidentemente $It\int E \cos \varepsilon' dl'$, siendo dl' un elemento del conductor $ROSR$ supuesto, por un momento, lineal, y ε' el ángulo que la fuerza eléctrica E en un punto del conductor forma con la tangente al mismo.

Luego

$$It \int E \cos \varepsilon' dl' + 4\pi \frac{Iq}{C} = 0$$

de donde

$$-\int E \cos \varepsilon' dl' = \frac{4\pi \frac{q}{t}}{C}$$

y como $\frac{q}{t}$ es la intensidad magnética, llamándola $\overset{M}{I}$, se tendrá, empleando notaciones análogas á las anteriores,

$$-\text{curl } E = \frac{4\pi}{C} \overset{M}{\bar{I}}. \tag{5}$$

V

Se supone en Física que los cuerpos están impregnados de éter en el que pululan un sin fin de partículas cargadas de electricidad que se denominan electrones. Estos se mueven de muy distinta manera en los distintos cuerpos, y precisamente esa diversidad de movimientos los distingue en sus cualidades.

La intensidad de la corriente, se compone así de dos partes: La

corriente en el éter, y las corrientes debidas al movimiento ó transporte de los electrones.

Veamos como podemos concebir la primera intensidad ó intensidad de corriente en el éter.

Supongamos dos conductores electrizados A y B el uno con electricidad vitrea y el otro con electricidad resinosa en la misma cantidad. Cuando, por medio de un hilo metálico, ponemos en comunicación A y B, ocurre algo que decimos es el paso de la electricidad positiva de A por el hilo, y neutralización de la de B. Esto responde á cierto modo de concebir la electricidad, como si en A tuviéramos un cierto nivel de agua y en B otro inferior, y por medio de un tubo estableciéramos la comunicación entre A y B. A esta manera de concebir la electricidad, substituíremos otra que nos será de gran utilidad. Imaginaremos que el estado eléctrico de A es como el de un fluído comprimido, el de B como el de un fluído sometido á expansión. Al poner en comunicación A y B por medio del hilo (suponemos A y B en el éter) el fluído comprimido de A tiende á marcharse y el de B á acrecentarse con el que circula por el hilo. Mas en vez de acumularse el fluído en B y disminuir la cantidad del de A, supondremos que todo el que va á B vuelve á A por el éter, pero, por efecto del movimiento, desaparecen la presión en A y la expansión en B. Ello sería algo así como si por medio de dos máquinas eleváramos en una un cubo con agua y bajáramos otro en la otra el mismo número de metros respecto del nivel en que primitivamente estaban, y que por medio de un tubo estableciéramos comunicación entre los mismos. El agua del más alto pasaría al mas bajo, mas suponiendo que este no puede contener sino la capacidad primera, rebosaría; imaginemos ahora que esta agua que rebosa se echa al primer cubo, y que mientras la circulación se verifica, los dos cubos vuelven á su posición primera de modo que no pase agua del uno al otro.

La cantidad de electricidad que en la unidad de tiempo pasará por la unidad de superficie normal en el éter será mucho menor que la correspondiente en el hilo conductor, atendido á que por una superficie pequeña pasa en el mismo tiempo la misma cantidad de electricidad, aunque en sentido contrario, que pasa al través de una superficie indefinidamente grande en el éter.

Con esto no nos será difícil definir la intensidad de corriente en el éter. Consideremos una superficie cerrada que envuelva al conductor A y no al B. La cantidad de electricidad que pasa al través de esta superficie es cero, y está constituída por dos partes, la que pasa por el hilo y la que no pasa por él. Llamemos $\underset{Sh}{I}$ á la intensidad por unidad de superficie normal en el hilo correspondiente al trozo de superficie interceptada por él, y $\underset{Se}{I}$ á la expresión análoga correspon-

diente al resto de la superficie; será

$$I_{Sh} = \frac{\partial \overline{q}}{dt}$$

siendo $\overline{q}$ la cantidad de electricidad que pasa al través del hilo por unidad de superficie normal. Pero por (2) y $\int \overline{q} ds = \Sigma q$

$$-\int^{c} I_{Sh} dS = \frac{I}{4\pi} \int \frac{\partial E_n}{\partial t} dS$$

estando; la primera integral limitada á la porción de superficie interceptada por el conductor; la segunda se refiere á toda la superficie. Pero

$$\int^{c} I_{Sh}\, dS + \int^{S-c} I_{Se}\, dS = 0$$

en que la segunda integral se refiere á toda la superficie menos la porción interceptada por el conductor. Pero como esta es pequeña, podemos escribir en vez de la sugunda integral $\int I_{Se} dS$ en que se entiende que hace referencia á toda la superficie, en cuyo caso

$$4\pi \int I_{Se}\, dS = \int \frac{\partial E_n}{\partial t}\, dS$$

y por tanto

$$4\pi\, I_{Se} = \frac{\partial E_n}{\partial t}$$

y en lenguaje vectorial, sencillamente

$$4\pi\, \overline{I}_e = \frac{\partial E}{\partial t}. \qquad (6)$$

Si, en vez de considerar dos masas eléctricas A y B, hubiésemos considerado dos masas magnéticas y el circuito formado por las líneas de fuerza del interior del imán que constituyen y las del exterior en el éter, hubiéramos obtenido análogamente

$$4\pi \overline{I}^{m}_{e} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial t}. \qquad (7)$$

VI

Las dos expresiones anteriores de la intensidad se refieren al caso de propagación en el éter. Como vamos á estudiar la propagación en un medio que presenta la polarización rotatoria, admitiremos como ya hemos dicho la existencia de electrones. Estos tendrán en los

cuerpos, objeto de nuestro estudio un movimiento especial. Admitiremos, por ejemplo, que el movimiento de un electrón en un cuerpo que presenta la polarización rotatoria natural se puede imaginar descompuesto en dos: uno que llamaremos lato y que consistirá en un movimiento de oscilación rectilíneo, y otro movimiento de rotación alrededor de un eje que podrá, por ejemplo, coincidir con la recta en que se mueve en el movimiento lato; más claro, como el movimiento de un punto que se mueve en una circunferencia cuyo centro está animado de un movimiento rectilíneo de oscilación según una recta normal al plano del círculo. Llamaremos s á la variable que define el movimiento lato y r y α á las que definen el movimiento circular (r el radio y α el ángulo polar). El movimiento circular se supondrá en el mismo sentido para los electrones todos.

Para expresar las fuerzas que actúan sobre el electrón, veamos el trabajo realizado por él mismo al haber girado, en un movimiento circular, 2π exactamente. Para un corrimiento $\sqrt{ds^2 + rd\alpha^2}$ en su trayectoría, se tiene como expresión del trabajo, suponiendo dirigido el eje de las x según el eje de giro, y llamando e á la cargo eléctrica del electrón,

$$dT = e\,[E_x\,ds - E_y r \operatorname{sen} \alpha d\alpha + E_z r \cos \alpha d\alpha].$$

Por el teorema de Maclaurín

$$E_y = E^0{}_y + r \cos \alpha \frac{\partial E_y}{\partial y} + r \operatorname{sen} \alpha \frac{\partial E_y}{\partial z}$$

$$E_z = E^0{}_z + r \cos \alpha \frac{\partial E_z}{\partial y} + r \operatorname{sen} \alpha \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

siendo $E^0{}_y$, $E^0{}_z$ los valores de E_y y E_z en el centro del círculo que correspondería al movimiento en su circunferencia. Luego por una rotación de 2π, poniendo $\frac{ds}{rd\alpha} = \operatorname{tg} \varphi$, será

$$T = e \left\{ 2\pi r \operatorname{tg} \varphi\, E_x + \pi r^2 \left[\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right] \right\}$$

por tanto, para una dirección cualquiera

$$T = e 2\pi r \operatorname{tg} \varphi \left[\vec{E} + \frac{r}{z} \cot \varphi \operatorname{curl} E \right]$$

y, como $2\pi r \operatorname{tg} \varphi$ es el camino recorrido proyectado según el eje de giro, la expresión de la fuerza que sobre el electrón actúa será, vectorialmente, por unidad de masa, y en la dirección del movimiento lato

$$E + \frac{r}{2} \cot \varphi \operatorname{curl} \mathrm{E}$$

que escribiremos aproximadamente

$$E + f' \text{ curl } E.$$

Esta es la fuerza eléctrica que actúa sobre la masa eléctrica uno del electrón, pero á los electrones se les asigna también masa mecánica, que llamaremos por ejemplo m. Y así resultan sometidos á las fuerzas mecánicas provinientes de la resistencia que puede ofrecerles el medio, y aún se admite, para explicar el movimiento de oscilación calificado de movimiento lato, una fuerza atractiva dirigida hacia el centro de oscilación y proporcional á la distancia al mismo ó sea, escogiendo s convenientemente, á s. Así, pues, la ecuación del movimiento lato, será

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{4\pi e^2}{\delta} s + Re^2 \frac{\partial s}{\partial t} = e \left(\bar{E} . + f' \text{ curl } E \right).$$

En esta ecuación se ha dado al coeficiente de resistencia proporcional á la velocidad la forma Re^2 para indicar que, cualquiera que sea e, representa una fuerza de idéntica dirección. Lo mismo puede decirse del coeficiente de proporcionalidad de distancia $\frac{4\pi e^2}{\delta}$. Se le da esta forma, llamando á δ coeficiente de vibración propia, por comodidad en la discusión de la dispersión rotatoria.

Si admitimos que s es una función periódica de la forma $e^{i \frac{t}{T} 2\pi}$ (*) con un período T, y ponemos para simplificar

$$a = \frac{R\delta}{4\pi}, \qquad b = \frac{m\delta}{4\pi e^2}, \qquad \tau = \frac{T}{2\pi}$$

resulta de la ecuación anterior

$$es = \frac{\delta}{4\pi \left[1 + \frac{ia}{\tau} - \frac{b}{\tau^2} \right]} \left[\bar{E} + f' \text{ curl } E \right].$$

La intensidad de corriente ó cantidad de electricidad que en la unidad de tiempo pasa por unidad de sección normal en una sucesión de electrones que se mueven describiendo las trayectorías que le corresponden, proyectada sobre la dirección de s, será, si hay en la unidad de volumen N electrones de masa e, N' de masa e'.....

$$\overline{\overline{I}}^{el} = \Sigma e N \frac{ds}{dt}$$

Por tanto, la intensidad total, suma de la corriente en el éter y de

---

(*) Para comodidad se introduce la forma imaginaria $e^{i \frac{t}{T} 2\pi}$, pero en todo caso debe entenderse que en cualquier valor en que intervenga i y que, por tanto, sea una cantidad imaginaria, físicamente solo vale de ella la parte real.

la corriente debida á los electrones es

$$\overline{I} = \overline{I}_e + \overset{\overline{el}}{I}.$$

De modo que

$$4\pi\overline{I} = \varepsilon \frac{\partial \overline{E}}{\partial t} + f \operatorname{curl} \frac{\partial E}{\partial t}, \qquad (6\,\text{bis})$$

habiendo puesto, para simplificar,

$$\varepsilon = 1 + \Sigma \frac{N\delta}{1 - \frac{b}{\tau^2}}, \qquad f = \Sigma \frac{N\delta t'}{1 - \frac{b}{\tau^2}}$$

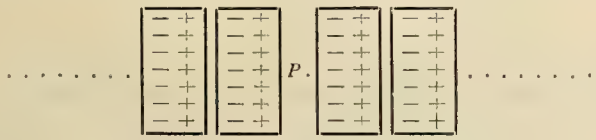
y haciendo caso omiso del coeficiente de resistencia del medio R cuyo interés se limita al estudio de la dispersión.

De modo que la ecuación (4) puede escribirse

$$\frac{\varepsilon}{C}\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{f}{C} \operatorname{curl} \frac{\partial E}{\partial t} = \operatorname{curl} H. \qquad (8)$$

Del mismo modo la expresión de $\overset{m}{I}$ se compondrá de $\overset{\overline{m}}{I_e}$ más la parte correspondiente á la existencia y movimiento de los electrones.

Al moverse los electrones según hélices, forman como una corriente en un solenoide, y en el interior de este solenoide la intensidad magnética es algo más que la intensidad en el éter $\overset{\overline{m}}{I_e}$. Evaluemos la intensidad en el interior de un solenoide. Sea un punto del eje comprendido entre dos espiras consecutivas, y supongamos que hay $\sqrt[3]{N}$ espiras en la unidad de longitud. Podemos substituir á las corrientes en los circuitos, hojas magnéticas que produzcan el mismo efecto. El polo magnético P que se encuentra entre dos hojas próximas, es decir entre dos caras próximas cargadas con electricidades contrarias, (figura) sufre una acción igual á la del doble de una de las caras puesto que una le repele hacia la derecha, la +, y otra la atrae hacia



la derecha, y en cuanto á la acción del resto del solenoide ó resto de las hojas magnéticas no tiene, podemos suponer, influencia: en las intermedias, por anularse la de la cara + con la de la — que está junto á ella y en las finales porque las supondremos suficientemente alejadas para hacer caso omiso de su efecto. Un disco circular cargado con densidad magnética superficial δ ejerce sobre un polo magnético unidad colocado á una distancia p del mismo una acción, que encon-

traremos integrando las acciones de los elementos superficiales proyectadas según la perpendicular del punto al disco, perpendicular que supondremos pasa por el centro del disco.

Será

$$\int \frac{\delta ds}{r^2} \cos \alpha = \int \delta d\omega = \delta \Omega$$

siendo Ω el ángulo sólido bajo el cual se ve desde P el contorno del disco. Para $p = 0$, la acción es $\delta \times 2\pi$, y la de dos discos con cantidades magnéticas de distinto signo é inmediatos, $4\pi\delta$.

Ahora bien, la equivalencia entre circuitos y hojas, exige en este caso que

$$\delta = \sqrt[3]{N} i$$

siendo i la corriente en las espiras en unidades electromagnéticas. Para evaluar i consideremos que si T representa el tiempo que tarda el electrón e en recorrer una espira, en un segundo la proyección del electrón sobre un plano normal al eje de la hélice que describe pasa $\frac{1}{T}$ veces por un mismo punto, de modo que la intensidad en él en unidades electrostáticas será $\frac{e}{T}$. Y como en el tiempo T el electrón se mueve en la dirección del eje de la hélice $2\pi r \operatorname{tg} \varphi$, la velocidad del mismo en esta dirección, que hemos llamado $\frac{ds}{dt}$, será

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2\pi r \operatorname{tg} \varphi}{T}$$

y como $\frac{ds}{dt}$ nos es conocido en función E y sus derivadas,

$$T^{-1} = \frac{ds}{dt} \frac{\cot \varphi}{2\pi r}$$

y, por lo tanto, en unidades electrostáticas,

$$i = e \cot \varphi \frac{ds}{dt} : 2\pi r.$$

La acción, pues, en un punto del eje del solenoide, será,

$$4\pi \frac{i}{C} \sqrt[3]{N} = 4\pi \frac{e}{C} \cot \varphi \frac{ds}{dt} : 2\pi r.$$

Admitiendo que la fuerza en un punto que no está en el eje difiere poco de la fuerza en el eje, el producto de la fuerza por la superficie normal representará el flujo,

$$2\pi r \frac{e}{C} \cot \varphi \frac{ds}{dt} \sqrt[3]{N}$$

pero, observando que hay $N^{3/2}$ solenoides en la unidad de volumen, el flujo total á través de la unidad de superficie normal, teniendo en cuenta todas las clases de electrones, valdrá

$$N = \frac{2\pi}{C} \Sigma\, r \cot \varphi\, e\, N \frac{ds}{dt}.$$

Esta expresión, flujo por unidad de superficie normal, hay que considerarla añadida al flujo por unidad de superficie normal en el éter, que es evidentemente $\bar{H}$. Luego

$$4\pi \overset{m}{\bar{I}} = 4\pi \overset{m}{\bar{I}} + 4\pi \overset{m\,el}{\bar{I}} = \frac{\partial\,[H + N]}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t}. \qquad \text{(7 bis)}$$

Para el cálculo de N, ó para el de $\frac{ds}{dt}$, haremos caso omiso del término en f' en la expresión hallada para es, de modo que escribiremos aproximadamente

$$es = \frac{\delta}{4\pi\left(1 - \frac{b}{\tau^2}\right)} \bar{E}.$$

Y así,

$$N = \frac{1}{C} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \Sigma \frac{N \partial r' \operatorname{tg} \varphi}{2\left(1 - \frac{b}{\tau^2}\right)} = \frac{f}{C} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

Y la ecuación (5) se transformará en la

$$\frac{1}{C} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{t}{C^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\operatorname{curl} E. \qquad (9)$$

VII

Las fórmulas 6 bis y 7 bis, las hemos deducido en la hipótesis de medios isótropos. Para medios cristalinos admitiremos para $\bar{I}$ y $\overset{m}{\bar{I}}$ expresiones de las cuales las anteriores sean un caso particular. Lo más elemental será generalizar la expresión de $\bar{I}$ por ejemplo, en la siguiente forma

$$4\pi\, I_x =$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \varepsilon_2 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \varepsilon_3 \frac{\partial E_z}{\partial t} + f_1 \operatorname{curl}_x \frac{\partial E}{\partial t} + f_2 \operatorname{curl}_y \frac{\partial E}{\partial t} + f_3 \operatorname{curl}_z \frac{\partial E}{\partial t} + \ldots\ldots$$

$$4\pi\, I_y =$$

$$\varepsilon_4 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \varepsilon_5 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \varepsilon_6 \frac{\partial E_z}{\partial t} + f_4 \operatorname{curl}_x \frac{\partial E}{\partial t} + f_5 \operatorname{curl}_y \frac{\partial E}{\partial t} + f_6 \operatorname{curl}_z \frac{\partial E}{\partial t} + \ldots..$$

$$4\pi\, I_z =$$

$$\varepsilon_7 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \varepsilon_8 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \varepsilon_9 \frac{\partial E_z}{\partial t} + f_7 \operatorname{curl}_x \frac{\partial E}{\partial t} + f_8 \operatorname{curl}_y \frac{\partial E}{\partial t} + f_9 \operatorname{curl}_z \frac{\partial E}{\partial t} + \ldots..$$

indicando los puntos suspensivos potencias de ε y f superiores á la primera. Suponiendo en primera aproximación que omitimos estas potencias, y que $f_1 = f_5 = f_9 = f$, $f_2 = f_3 = f_4 = f_6 = f_7 = f_8 = 0$, suposición esta última que no está del todo conforme con los resultados experimentales, pero que hacemos aquí para simplificar, quedan como fórmulas generalizadas

$$4\pi\, I_x = \varepsilon_1 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \varepsilon_2 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \varepsilon_3 \frac{\partial E_z}{\partial t} + f \operatorname{cur}_x \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$4\pi\, I_y = \varepsilon_4 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \varepsilon_5 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \varepsilon_6 \frac{\partial E_z}{\partial t} + f \operatorname{curl}_y \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$4\pi\, I_z = \varepsilon_7 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \varepsilon_8 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \varepsilon_9 \frac{\partial E_z}{\partial t} + f \operatorname{curl}_z \frac{\partial E}{\partial t}.$$

Si se tratara de cuerpos desprovistos de polarización rotatoria, bastará hacer $f = 0$ en las fórmulas anteriores para tener las correspondientes.

Las fórmulas que acabamos de escribir pueden simplificarse en los términos que no tienen f. En efecto, en un cristal que no presenta la polarización rotatoria, el trabajo T' debido á una corriente I en un tiempo dt recorriendo una curva cerrada cualquiera l en el cristal, vale

$$T' = dt \int (I_x E_x + I_y E_y + I_z E_z)\, dl.$$

Si el cristal es transparente, al cabo del período correspondiente al fenómeno luminoso, recobra el cristal su primitivo estado. Luego el trabajo anterior ó variación de la energía debido á la circulación de la corriente I en el interior del cristal, debe ser la diferencial exacta de una cierta función I que defina la energía eléctrica. Luego

$$I_x E_x + I_y E_y + I_z E_z = \frac{d\Pi}{dt}$$

y por tanto

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_4, \quad \varepsilon_6 = \varepsilon_8, \quad \varepsilon_7 = \varepsilon_3.$$

De modo que el determinante

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 & \varepsilon_5 & \varepsilon_6 \\ \varepsilon_7 & \varepsilon_8 & \varepsilon_9 \end{vmatrix}$$

es simétrico. Siendo asi, se podrá escribir

$$\varepsilon_1 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \varepsilon_2 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \varepsilon_3 \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{4\pi}{E_x} \frac{\Pi}{\partial x}$$

$$\varepsilon_2 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \varepsilon_5 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \varepsilon_6 \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{4\pi}{E_y} \frac{\partial \Pi}{\partial y}$$

$$\varepsilon_3 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \varepsilon_6 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \varepsilon_9 \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{4\pi}{E_z} \frac{\partial \Pi}{\partial z}$$

$$\Pi = \frac{1}{8\pi} [\varepsilon_1 E_x^2 + \varepsilon_5 E_y^2 + \varepsilon_9 E_z^2 + 2\varepsilon_2 E_y E_x + 2\varepsilon_3 E_z E_x + 2\varepsilon_6 E_z E_y]$$

la forma cuadrática Π se podrá transformar mediante un cambio de coordenadas en la forma simplificada

$$\Pi = \frac{1}{8\pi} \left[\bar{\varepsilon}_1 E^2_{x'} + \bar{\varepsilon}_2 E^2_{y'} + \bar{\varepsilon}_3 E^2_{z'} \right]$$

y, por tanto, refiriendo las componentes de I al mismo sistema, y poniendo en vez de $I_{x'}$ $I_{y'}$ $I_{z'}$ $E_{x'}$ $E_{y'}$ $E_{z'}$, I_x, I_y, I_z, E_x, E_y, E_z, ya que no ha de haber lugar á confusión por referirnos en adelante siempre al nuevo sistema,

$$\left.\begin{aligned} 4\pi I_x &= \bar{\varepsilon}_1 \frac{\partial E_x}{\partial t} + f \operatorname{curl}_x \frac{\partial E}{\partial t} \\ 4\pi I_y &= \bar{\varepsilon}_2 \frac{\partial E_y}{\partial t} + f \operatorname{curl}_y \frac{\partial E}{\partial t} \\ 4\pi I_z &= \bar{\varepsilon}_3 \frac{\partial E_z}{\partial t} + f \operatorname{curl}_z \frac{\partial E}{\partial t} \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

En cuanto á la fórmula 7 bis, cambiando los ejes será de la misma forma

$$\left.\begin{aligned} 4\pi \overset{m}{I}_x &= \frac{\partial H_x}{\partial t} + \frac{\partial N_x}{\partial t} \\ 4\pi \overset{m}{I}_y &= \frac{\partial H_y}{\partial t} + \frac{\partial N_y}{\partial t} \\ 4\pi \overset{m}{I}_z &= \frac{\partial H_z}{\partial t} + \frac{\partial N_z}{\partial t} \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Las fórmulas 4 y 5, 10 y 11, dan, definitivamente, las ecuaciones que ligan los vectores E y H

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\bar{\varepsilon}_1}{C}\frac{\partial E_x}{\partial t}+\frac{t}{C}\,\mathrm{curl}_x\frac{\partial E}{\partial t}=\mathrm{curl}_x\,H\\
&\frac{\bar{\varepsilon}_2}{C}\frac{\partial E_y}{\partial t}+\frac{t}{C}\,\mathrm{curl}_y\frac{\partial E}{\partial t}=\mathrm{curl}_y\,H\\
&\frac{\bar{\varepsilon}_3}{C}\frac{\partial E_z}{\partial t}+\frac{t}{C}\,\mathrm{curl}_z\frac{\partial E}{\partial t}=\mathrm{curl}_z\,H\\
&\frac{1}{C}\frac{\partial E_x}{\partial t}+\frac{f}{C^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}=-\,\mathrm{curl}_x\,H\\
&\frac{1}{C}\frac{\partial E_y}{\partial t}+\frac{f}{C^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}=-\,\mathrm{curl}_y\,H\\
&\frac{1}{C}\frac{\partial E_z}{\partial t}+\frac{f}{C^2}\frac{\partial^2 E^z}{\partial t^2}=-\,\mathrm{curl}_z\,H
\end{aligned}\right\}\qquad(12)$$

VIII

Eliminando en las fórmulas anteriores H_x, H_y, H_z, y poniendo

$$\bar{\varepsilon}_1\,E_x=u,\quad \bar{\varepsilon}_2\,E_y=v,\quad \bar{\varepsilon}_3\,E_z=w,$$

$$\frac{C^2}{\bar{\varepsilon}_1}=a,\quad \frac{C^2}{\bar{\varepsilon}_2}=b,\quad \frac{C^2}{\bar{\varepsilon}_3}=c,\quad \frac{2f}{\varepsilon}=g,\quad \varepsilon=\frac{\bar{\varepsilon}_1+\bar{\varepsilon}_2+\bar{\varepsilon}_3}{3}$$

se tiene, suponiendo en los términos que tienen f por factor y ya que la diferencia entre $\bar{\varepsilon}_1$, $\bar{\varepsilon}_2$, $\bar{\varepsilon}_3$ es prácticamente pequeña y f es también una constante pequeña, que podemos sin error apreciable substituir los valores de $\bar{\varepsilon}_1$, $\bar{\varepsilon}_2$, $\bar{\varepsilon}_3$ por su medio aritmético ε

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a\Delta u-\frac{\partial}{\partial x}\left[a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial v}{\partial y}+c\frac{\partial w}{\partial z}\right]+g\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right]\\
&\frac{d^2 u}{\partial t^2}=b\Delta u-\frac{\partial}{\partial y}\left[a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial v}{\partial z}+c\frac{\partial w}{\partial z}\right]+g\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{du}{\partial z}\right]\\
&\frac{d^2 u}{\partial t^2}=c\Delta u-\frac{\partial}{\partial y}\left[a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial v}{\partial y}+c\frac{\partial w}{\partial z}\right]+g\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right]
\end{aligned}\right\}\qquad(13)$$

Tales son las ecuaciones que definen el campo del vector u, v, w, en un medio que presente los caracteres que hemos ido definiendo. Ahora bien, la hipótesis electromagnética de la luz aplicada á este

caso, consistirá en suponer, por ejemplo, que u v, w, son las tres componentes del vector luz.

IX

Admitamos que el vector luz puede definirse por una vibración. Es decir, supongamos que sean

$u =$ parte real de $Me^{i\rho}$, $v =$ parte real de $Ne^{i\rho}$, $w =$ parte real de $\Pi e^{i\rho}$

$$M = M + iM', \quad N = N + iN', \quad \Pi = P + iP'$$

$$\rho = \frac{1}{\tau}\left(t - \frac{mx + ny + pz}{V}\right), \quad \tau = \frac{2\pi}{T}, \quad m^2 + n^2 + p^2 = 1$$

ó, lo que es igual, estudiemos la propagación por ondas planas en un medio cristalino dotado de la polarización rotatoria. Para un instante determinado $t =$ const., el lugar geométrico de los puntos en que el vector luz tiene la misma dirección y módulo, es un plano cuya normal tiene por cosenos directores m, n, p.

Como es fácil ver, el segmento de normal comprendido entre dos posiciones del plano correspondientes á los tiempos $t =$ const, $t =$ const. $+ T$, es VT, luego V representa la velocidad del plano ú onda plana según la normal.

La solución particular indicada más arriba, ¿en qué condiciones es aceptable? Substituyamos los valores supuestos u, v, w, en las ecuaciones (13), y hallaremos las siguientes condiciones, en que para simplificar se ha escrito $g\tau^{-1}\ V = \sigma$:

$$\left.\begin{aligned}
(V^2 - a)\,M &= -\,m\,(amM + bnN + cp\Pi) + i\sigma\,(\Pi\,n - Np)\\
(V^2 - b)\,N &= -\,n\,(amM + bnN + cp\Pi) + i\sigma\,(Mp - \Pi m)\\
(V^2 - c)\,\Pi &= -\,p\,(amM + bnN + cp\Pi) + i\sigma\,(Nm - Mn)
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

En la propagación por ondas planas que estamos estudiando, estas son transversales, es decir que, en cada instante, el vector u, v, w es normal á la dirección de la normal á la onda plana, m, n, p. En efecto, diferenciando las tres primeras de las (12), la primera respecto á x, la segunda respecto á y, y la tercera respecto á z, se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right] = 0.$$

Si suponemos inicialmente $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$, en todo instante y lugar, $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$, de modo que

$$Mm + Nn + \Pi p = 0. \qquad (15)$$

Observando que las ecuaciones (14) y (15) son lineales en M, N, Π y $amM + bnN + cp\Pi$, se tiene eliminando estas cantidades,

$$\begin{vmatrix} V^2 a & i\sigma p & -i\sigma n & m \\ -i\sigma p & V^2 b & i\sigma m & n \\ i\sigma n & -i\sigma m & -p & p \\ -m & -n & -p & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ó bien,

$$m^2(V^2-b)(V^2-c)+n^2(V^2-c)(V^2-a)+p^2(V^2-a)(V^2-b)=\sigma^2. \quad (16)$$

En esta fórmula σ es una constante pequeña. Si es cero, se tiene la ecuación que da para valores de m, n, p, los dos correspondientes de V en el caso de cristales sin polarización rotatoría. En el caso que estamos indicando, también para cada valor de m, n, p, hay dos valores de V, lo que quiere decir que, dada una normal hay dos ondas planas que se propagan según ella con velocidades dadas por

$$2V^2-m^2(b+c)+n^2(a+c)+p^2(a+b)\pm\sqrt{(A+B-C)^2-4AB+4\sigma^2}$$

siendo

$$A = m^2(b-c), \quad B = n^2(c-a), \quad C = p^2(a-b).$$

Si suponemos $a > b > c$, A y C son positivas y B negativa. Así es que dentro de la raíz cuadrada hay cantidades positivas tan solo, de modo que no hay dirección ninguna de la normal para que los valores de V son iguales. Pero hay dos en que la diferencia es mínima. Estas direcciones se llaman ejes ópticos. Si designamos por o^2 y e^2 las dos raíces de V^2, como σ es muy pequeña, la diferencia $o^2 - e^2$ es un mínimo cuando

$$A + B - C = 0 \qquad AB = 0.$$

Los valores de m, n, p, para estas direcciones, serán

$$m^2 = \frac{a-b}{a-c}, \quad n = 0, \quad p^2 = \frac{b-c}{a-c}$$

y los valores de V^2

$$V^2 = b \pm \sigma, \qquad V = \sqrt{b}\left(1 \pm \frac{\sigma}{2b}\right).$$

Si $\sigma = 0$, los dos valores de V correspondientes á las direcciones de los ejes ópticos son iguales. Al valor o de V correspondiente á una onda plana, corresponderá un valor de u, otro de v y w, y lo mismo al valor e. Suponiendo al vector localizado en un punto, veamos cuales son las trayectorías del extremo del vector correspondiéntes á las dos raíces o^2 y e^2 de la ecuación en V^2. Sea r el módulo del

vector luz en el caso de la onda correspondiente al valor o y r' el módulo correspondiente al valor e.

La solución admitida para u, v, w, es,

$$\begin{aligned} u &= \text{parte real de } Me^{i\varphi} = M \cos \varphi - M' \operatorname{sen} \varphi \\ v &= \qquad\qquad\qquad N \cos \varphi - N' \operatorname{sen} \varphi \\ w &= \qquad\qquad\qquad P \cos \varphi - P' \operatorname{sen} \varphi \end{aligned}$$

con las condiciones (14) y (15). Pero esta última (15), se puede desdoblar en

$$\begin{aligned} mM + nN + pP &= o, \\ mM' + nN' + pP' &= o; \end{aligned}$$

además, se puede escoger el origen de tiempo de tal modo que,

$$MM' + NN' + PP' = o,$$

y de este modo, las tres direcciones cuyos cosenos son $\frac{M}{r}, \frac{N}{r}, \frac{P}{r}$; $\frac{M'}{r'}, \frac{N'}{r'}, \frac{P'}{r'}$ y m, n, p son tres direcciones perpendiculares entre sí.

La trayectoria del extremo del vector luz es así una elipse, cuyos ejes tienen por direcciones las dos primeras direcciones anteriores. Proyectando en efecto los valores de u, v, w, según estas dos direcciones y la de la normal á la onda, se vé que esta última preyección es cero, y que eliminando φ entre las dos primeras, se tiene una elipse referida á sus ejes.

En virtud de la ortogonalidad mutua entre los ejes de la elipse trayectoria del extremo del vector luz y la normal á la onda, se tendrá

$$\frac{M'}{r'} = \frac{Pn - Nr}{r}; \qquad \frac{M}{r} = -\frac{P'n - N'r}{r'}$$

. . . . . .

de donde, y por las ecuaciones (14), separando en ellas la parte real y la imaginaria,

$$\left.\begin{aligned} \left(V^2 - a - \sigma\frac{r'}{r}\right) M &= -m(amM + bnN + cpP) \\ \left(V^2 - b - \sigma\frac{r'}{r}\right) N &= -n(amM + bnN + cpP) \\ \left(V^2 - c - \sigma\frac{r'}{r}\right) P &= -p(amM + bnN + cpP) \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

$$\left.\begin{aligned}\left(V^2 - a - \sigma\frac{r}{r'}\right)M' &= -\,m\,(am\,M' + bn\,N' + cp\,P')\\ \left(V^2 - b - \sigma\frac{r}{r'}\right)N' &= -\,n\,(am\,M' + bn\,N' + cp\,P')\\ \left(V^2 - c - \sigma\frac{r}{r'}\right)P' &= -\,p\,(am\,M' + bn\,N' + cp\,P')\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

De las (17), multiplicando por M, N, P, respectivamente y sumando, resulta

$$V^2 - \left(a\,\frac{M^2}{r^2} + b\,\frac{N^2}{r^2} + c\,\frac{P^2}{r^2}\right) = \sigma\,\frac{r'}{r}\,.$$

Análogamente, de las (18)

$$V^2 - \left(a\,\frac{M'^2}{r'^2} + b\,\frac{N'^2}{r'^2} + c\,\frac{P'^2}{r'^2}\right) = \sigma\,\frac{r}{r'};$$

y añadiendo las dos últimas, puesto que

$$\frac{M^2}{r^2} + \frac{M'^2}{r'^2} = 1 - m^2 = n^2 + p^2, \text{ etc.},$$

$$2V^2 - a\,(n^2 + p^2) - b\,(m^2 + p^2) - c\,(m^2 + n^2) = \sigma\left(\frac{r}{r'} + \frac{r'}{r}\right).$$

Si designamos á $\frac{r}{r'}$ por K, y por K_o si se trata del valor correspondiente al valor o de V y K_e al e de V, puesto que por (16),

$$a\,(n^2 + p^2) + b\,(p^2 + m^2) + c\,(m^2 + n^2) = o^2 + e^2,$$

$$\sigma\left(K_o + \frac{1}{K_o}\right) = o^2 - e^2, \qquad \sigma\left(K_e + \frac{1}{K_e}\right) = e^2 - o^2;$$

y añadiendo estas dos

$$(K_o + K_e)\,(1 + K_o\,K_e) = o.$$

Por tanto, $K_o = -\,K_e$ ó $K_o = -\,\frac{1}{K_e}$. Esto significa que las dos elipses correspondientes á los dos valores de V, ó coinciden ó están, por decirlo así, cruzadas. En todo caso descritas en sentido contrario. Pero si hubiéramos supuesto $\sigma = o$, hubiéramos hallado que las elipses degeneran en dos rectas perpendiculares, luego por continuidad admitiremos como solución única $K_o = -\,\frac{1}{K_e}$.

Para aquellos puntos para los que $o^2 - e^2 = \pm\,2\sigma$ que son los ejes ópticos, $K_o = \pm\,1$, $K_e = \mp\,1$ y las elipses se convierten en círculos.

Los dos valores o^2 y e^2 de V^2 que da la fórmula (16), se pueden escribir introduciendo los ángulos g y g' que la normal á la onda forma con los ejes ópticos, del siguiente modo (*)

$$\left.\begin{aligned} 2o^2 &= a + c + (a - c)\cos g \cos g' + \sqrt{(a-c)^2 \operatorname{sen}^2 g \operatorname{sen}^2 g' + 4\sigma^2} \\ 2e^2 &= a + c + (a - c)\cos g \cos g' - \sqrt{(a-c)^2 \operatorname{sen}^2 g \operatorname{sen}^2 g' + 4\sigma^2} \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

y además

$$2\sigma K_o = -\frac{2\sigma}{K_e} = (a-c)\operatorname{sen} g \operatorname{sen} g' + \sqrt{(a-c)^2 \operatorname{sen}^2 g \operatorname{sen}^2 g' + 4\sigma^2} \quad (20)$$

Si el cristal fuera de tal naturaleza que $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ por ejemplo, los ejes ópticos se confunden en la dirección única del eje x. En este caso, $g = g'$. Las aplicaciones que más adelante se hacen de la teoría corresponden á la propagación de una onda plana en un cuarzo tallado en placa y normalmente á su eje óptico; el cuarzo es de los cristales para los que $\bar{\varepsilon}_2 = \bar{\varepsilon}_3$. Sea g el ángulo que la normal á la onda forma con la dirección del eje óptico. Dada la normal se propagan dos ondas, cuyas velocidades vienen dadas por las fórmnlas

$$2o^2 = a + c + (a - c)\cos^2 g + \sqrt{(a-c)^2 \operatorname{sen}^4 g + 4\sigma^2},$$

$$2e^2 = a + c + (a - c)\cos^2 g - \sqrt{(a-c)^2 \operatorname{sen}^4 g + 4\sigma^2},$$

y además

$$2\sigma K_o = -\frac{2\sigma}{K_e} = (a-c)\operatorname{sen}^2 g + \sqrt{(a-c)^2 \operatorname{sen}^4 g + 4\sigma^2}.$$

Supondremos también que la normal á la onda plana forma un ángulo pequeño con la dirección del eje del cristal. Es decir, nos limitaremos á estudiar la propagación por ondas planas en la próximidad del eje.

X

Se llama superficie de onda á la envolvente de todas las ondas planas en un instante determinado, que un segundo antes pasaban por un punto que es su centro. Con lo dicho hay elementos suficientes para deducir su ecuación, que desde luego es complicada. Nosotros introducimos aquí la noción de superficie de onda para poder hablar de la construcción de las normales á las ondas refractadas si

(*) Dejamos que el lector se ejercite en deducir estas fórmulas.

se nos da la normal de la onda incidente. Si una onda plana incide en la superficie plana de separación de dos medios, aire y cuarzo por ejemplo, escogeremos un punto A en la superficie límite de separación, por el cual pase la onda incidente en un instante dado. La misma onda, al cabo de un segundo, será tangente á la superficie de onda cuyo centro es el punto considerado, superficie de onda en el medio aire, por ejemplo. Imaginemos este plano tangente á la superficie de ondas dicha. La onda plana en el aire se refractará parcialmente también. Para construir las ondas planas refractadas, desde la recta de intersección del plano anterior con la separación del aire y cuarzo, tracemos los planos tangentes á la superficie de onda en el cuarzo cuyo centro corresponda al punto A. Habrá en general cuatro planos tangentes, pero solo dos representarán ondas refractadas. Las normales desde el centro á estas dos ondas son las direcciones de propagación según la normal de las ondas planas que en el cuarzo engendra la onda luminosa que propagándose en el aire se encuentra con la superficie del cuarzo. Las amplitudes de los vectores luz en el cuarzo correspondientes á las dos ondas, son funciones de la amplitud y ángulo de incidencia de la onda plana incidente, pero nosotros prescindiremos de las modificaciones que la amplitud, y aun la naturaleza de la vibración, experimentan al atravesar la superficie de separación aire-cuarzo. Además, como estudiamos la propagación en la proximidad de la normal á la placa, vamos á suponer que las dos normales anteriores difieren poco, ó mejor que son una misma, de modo que las dos ondas planas son las correspondientes á una misma normal, y por tanto las velocidades con que se propagan según la normal serán o y e. Y llamando l al camino que recorren, g al ángulo de refracción y h al espesor,

$$l = \frac{h}{\cos g},$$

y la diferencia de fase al salir del cuarzo, en los valores de u, v, w, correspondientes á o y e valdrá,

$$\delta = \frac{2\pi}{T}\frac{h}{\cos g}\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{o}\right),$$

ó bien en virtud de las fórmulas del párrafo anterior, suponiendo $a - c$ pequeño, y quedándonos con los términos de segundo grado en sen g,

$$\delta = \frac{2\pi}{T}\frac{h}{2}\, a^{-3/2}\left(1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 g\right)\sqrt{(a-c)^2 \operatorname{sen}^4 g + 4\sigma^2} =$$

$$= \frac{2\pi}{T}\, h a^{-3/2}\, \sigma\left[1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 g\right]. \qquad (21)$$

Para la dirección del eje

$$\delta_o = \frac{2\pi}{T} h a^{-3/2} \sigma = \frac{8\pi^2 h f}{\lambda^2},$$

siendo la longitud de onda en el vacío $\lambda = CT$.

Cuando en una dirección se propagan dos vibraciones circulares, en que el movimiento circular tiene lugar en distinto sentido en todo momento, la resultante es una vibración rectilínea. Pero si una de las vibraciones circulares sufre un retardo δ_o, la vibración rectilínea resultante ha experimentado una rotación de $\frac{1}{2}\delta_o$. Aplicándolo al cuarzo, si suponemos que se propaga una onda de luz polarizada rectilíneamente (ó sea en que el vector u, v, w, tiene una dirección fija) cuya normal coincide con el eje, al salir del cuarzo, el plano de polarización habrá girado $\frac{1}{2}\delta_o$.

XI

Lo que sucede, pues, al incidir una onda plana en una lámina de cuarzo, onda plana cuya polarización supondremos elíptica para estudiar el caso mas general, es lo siguiente. La vibración elíptica de la onda incidente se descompone en dos vibraciones elípticas dextrogira una y levogira la otra, cuyos ejes tienen direcciones función del ángulo que forma la normal á las ondas planas refractadas con el eje, ángulo que hemos llamado g. Además la razón de los ejes K_o ó K_e es también función de g. Dado por tanto g, conoceremos las componentes respecto de un eje coordenado de las vibraciones elípticas, expresando que la suma de las referentes á las dos ondas refractadas es igual á lo componente sobre el mismo eje de la vibración elíptica incidente. Como g es pequeño supondremos que representamos las vibraciones en el plano normal á la placa de cuarzo, y que hacemos caso omiso de la componente en esta dirección ó sea de u, si la normal á la placa la consideramos, como hasta aquí, confundida con el eje x.

La vibración elíptica primitiva la podemos suponer dada por sus componentes sobre los ejes

$$\xi = \cos \beta' e^{i\tau t}, \qquad \eta = -\operatorname{sen} \beta' e^{i\tau t},$$

en que $\beta' < \frac{\pi}{4}$, y si es $\left\{\begin{matrix}\text{positiva}\\ \text{negativa}\end{matrix}\right.$ representa un vibración $\left\{\begin{matrix}\text{levogira}\\ \text{dextrogira}\end{matrix}\right.$. Aunque venga en forma imaginaria téngase siempre presente que se quiere expresar la parte real de ξ y η.

Llamemos ξ_1, η_1 y ξ_2, η_2 á las componentes de las dos vibraciones elípticas en el cuarzo, que desde luego serán de la forma

$$\xi_1 = c_1 \cos \beta e^{i\tau t}, \qquad \eta_1 = -ic_1 \operatorname{sen} \beta e^{i\tau t},$$

$$\xi_2 = c_2 \cos \beta e^{i\tau t}, \qquad \eta_2 = ic_2 \cos \beta e^{i\tau t},$$

en que β es menor que $\frac{\pi}{4}$ y $\left\{\begin{matrix}\text{positiva}\\ \text{negativa}\end{matrix}\right.$ según que, por ejemplo, sea la placa $\left\{\begin{matrix}\text{levogira}\\ \text{dextrogira}\end{matrix}\right.$. Una placa se llama así según que la rotación del plano de polarización (*) para una onda que se propague por el eje sea hacia la $\left\{\begin{matrix}\text{izquierda}\\ \text{derecha}\end{matrix}\right.$. Si llamamos α' al ángulo que el eje mayor de la elipse primitiva que representaremos simbólicamente por (ξ, η) forma con el eje mayor de (ξ_1, η_1), por ejemplo, se tendrá,

$$c_1 \cos \beta + c_2 \operatorname{sen} \beta = \cos \alpha' \cos \beta' + i \operatorname{sen} \alpha' \operatorname{sen} \beta'$$
$$c_1 \operatorname{sen} \beta - c_2 \cos \beta = \cos \alpha' \cos \beta' + i \operatorname{sen} \alpha' \cos \beta'$$

ó bien,

$$c_1 = \cos \alpha' \cos (\beta - \beta') + i \operatorname{sen} \alpha' \operatorname{sen} (\beta + \beta'),$$
$$c_2 = \cos \alpha' \operatorname{sen} (\beta - \beta') - i \operatorname{sen} \alpha' \cos (\beta + \beta').$$

Al recorrer la placa las dos ondas polarizadas elípticamente, sufre una respecto de la otra un retraso δ. Así es que si llamamos χ al ángulo que forma el eje mayor de (ξ_1, η_1) con la dirección «exclusiva» del analizador (**), la componente útil del vector v, w, al salir del analizador será, representando por ε cierta constante cuyo significado es fácil ver,

$$\equiv = \left\{\begin{matrix}(c_1 \cos \beta + c_2 \operatorname{sen} \beta e^{-i\delta}) \cos \chi - \\ - i\,(c_1 \operatorname{sen} \beta - c_2 \cos \beta\, e^{-i\delta}) \operatorname{sen} \chi\end{matrix}\right\} e^{i(\tau t - \varepsilon)}.$$

Esto representa un movimiento oscilatorio de la forma $A \cos \tau t + B \operatorname{sen} \tau t$. Este movimiento puede representar el de un punto atraído por un centro en función de la distancia, sin velocidad inicial. La

---

(*) Llamaremos plano de polarización á un plano paralelo al eje y normal á v, w, cuando este es rectilíneo.

(**) Un analizador es un sistema de cristales que no permite el paso de más ondas luminosas que aquellas en que el vector u, v, w, tiene componente según cierta dirección, que llamaremos «exclusiva». Naturalmente al salir del analizador, de la vibración de u, v, w, solo es útil la componente sobre la dirección exclusiva. Esta dirección la suponemos perpendicular al eje del cuarzo.

energía de este movimiento, suma de la potencial y cinética, vale $A^2 + B^2$. Análogamente, definiremos como energía Z en la variación del vector luz á la expresión $A^2 + B^2$. Para obtener $A^2 + B^2$ multiplicaremos $\equiv$ por su expresión conjugada, obtenida cambiando i en $-i$. Resulta así, si c'_1 y c'_2 son las expresiones conjugadas de c_1 y c_2

$$Z = \{c_1 c'_1 \cos^2\beta + c_2 c'_2 \operatorname{sen}^2\beta + (c_1 c'_2 e^{i\delta} + c'_1 c_2 e^{-i\delta}) \operatorname{sen}\beta \cos\beta\} \cos^2\chi$$

$$+ \{c_1 c'_1 \operatorname{sen}^2\beta + c_2 c'_2 \cos^2\beta - (c_1 c'_2 e^{i\delta} + c'_1 c_2 e^{-i\delta}) \operatorname{sen}\beta \cos\beta\} \operatorname{sen}^2\chi$$

$$- i\,(c_1 c'_2 e^{i\delta} - c'_1 c_2 e^{-i\delta}) \operatorname{sen}\chi \cos\chi,$$

y como

$$c_1 c'_1 = \cos^2\alpha' \cos^2(\beta - \beta') + \operatorname{sen}^2\alpha' \operatorname{sen}^2(\beta + \beta')$$

$$c_2 c'_2 = \cos^2\alpha' \operatorname{sen}^2(\beta - \beta') + \operatorname{sen}^2\alpha' \cos^2(\beta + \beta')$$

$$c_1 c'_2 = \cos^2\alpha' \operatorname{sen}(\beta - \beta') \cos(\beta - \beta') - \operatorname{sen}^2\alpha' \operatorname{sen}(\beta + \beta') \cos(\beta + \beta') + i \operatorname{sen}\alpha' \cos\alpha' \cos 2\beta'$$

$$c'_1 c_2 = \cos^2\alpha' \operatorname{sen}(\beta - \beta') \cos(\beta - \beta') - \operatorname{sen}^2\alpha' \operatorname{sen}(\beta + \beta') \cos(\beta + \beta') - i \operatorname{sen}\alpha' \cos\alpha' \cos 2\beta',$$

se tendrá

$$Z = \left\{\begin{array}{l} \cos^2\alpha' \cos^2\beta' + \operatorname{sen}^2\alpha' \operatorname{sen}^2\beta' - \operatorname{sen} 2\alpha' \cos 2\beta' \operatorname{sen} 2\beta \operatorname{sen}\delta/2 \cos\delta/2 \\ - [\cos^2\alpha' \operatorname{sen} 2(\beta - \beta') - \operatorname{sen}^2\alpha' \operatorname{sen} 2(\beta + \beta')] \operatorname{sen} 2\beta \operatorname{sen}^2\delta/2 \end{array}\right\} \cos^2\chi$$

$$+ \left\{\begin{array}{l} \cos^2\alpha' \operatorname{sen}^2\beta' + \operatorname{sen}^2\alpha' \cos^2\beta' + \operatorname{sen} 2\alpha' \cos 2\beta' \operatorname{sen} 2\beta \operatorname{sen}\delta/2 \cos\delta/2 \\ [\cos^2\alpha' \operatorname{sen} 2(\beta - \beta') - \operatorname{sen}^2\alpha' \operatorname{sen} 2(\beta + \beta')] \operatorname{sen} 2\beta \operatorname{sen}^2\delta/2 \end{array}\right\} \operatorname{sen}^2\chi$$

$$+ \left\{\begin{array}{l} \operatorname{sen} 2\alpha' \cos 2\beta' + 2\,[\cos^2\alpha' \operatorname{sen} 2(\beta - \beta') - \operatorname{sen}^2\alpha' \operatorname{sen} 2(\beta + \beta')] \\ \operatorname{sen}\delta/2 \cos\delta/2 - 2 \operatorname{sen} 2\alpha' \cos 2\beta' \operatorname{sen}^2\delta/2 \end{array}\right\} \operatorname{sen}\chi \cos\chi =$$

$$= \cos^2\beta' \cos^2(\chi - \alpha') + \operatorname{sen}^2\beta' \operatorname{sen}^2(\chi - \alpha') + \cos 2\beta' \times$$

$$[\operatorname{sen} 2\beta \operatorname{sen} 2(\chi - \alpha') \operatorname{sen}\delta/2 \cos\delta/2 - (\cos 2\alpha' \cos 2\chi \operatorname{sen}^2 2\beta + \operatorname{sen} 2\alpha' \operatorname{sen} 2\chi) \operatorname{sen}^2\delta/2]$$

$$+ \operatorname{sen} 2\beta' \cos 2\beta\,[\cos 2\chi \operatorname{sen} 2\beta \operatorname{sen}^2\delta/2 - \operatorname{sen} 2\chi \operatorname{sen}\delta/2 \cos\delta/2] =$$

$$= \operatorname{sen}^2\beta' + \cos 2\beta' \left\{\begin{array}{l} [\cos(\chi - \alpha') \cos\delta/2 + \operatorname{sen}(\chi - \alpha') \operatorname{sen} 2\beta \operatorname{sen}\delta/2]^2 \\ + \cos^2(\chi + \alpha') \cos^2 2\beta \operatorname{sen}^2\delta/2 \end{array}\right\}$$

$$+ \operatorname{sen} 2\beta' \cos 2\beta\,(\cos 2\chi \operatorname{sen} 2\beta \operatorname{sen}^2\delta/2 - \operatorname{sen} 2\chi \operatorname{sen}\delta/2 \cos\delta/2). \qquad (22)$$

XII

Aplicaremos la teoría anterior al caso indicado en el párrafo I. Un polarizador, aparato igual á un analizador, nos dará ondas luminosas en que u, v, w, tiene una dirección fija. La luz, polarizada rectilíneamente al atravesar la primera lámina de cuarzo, se descompondrá en dos vibraciones elípticas que, habida en cuenta su diferencia de fase, al salir del cuarzo formarán una vibración elíptica. Esta atravesará la lámina de mica que sigue al cuarzo. La mica es un cristal birrefringente en cuyo seno se propaga la luz según leyes que se deducen de las explicadas en los párrafos anteriores, anulando la constante que caracteriza la polarización rotatoria, por ejemplo f. Nosotros admitiremos aproximadamente, que descompuesta la vibración elíptica que llega á la lámina de mica en sus componentes según dos direcciones determinadas, el efecto de la lámina es dar á una respecto de la otra un retardo en camino recorrido de $\frac{1}{4}\lambda$ ó $\frac{1}{2}\lambda$, según que la mica interpuesta sea de las que se llaman de un cuarto de onda ó un medio de onda. En rigor esto no tiene lugar sino para las ondas que se propagan de tal modo, que la normal coincide con la perpendicular á la lámina de mica. El espesor l de esta, necesario para ello, vendrá dado por

$$\frac{2\pi l}{T}\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{o}\right)=\frac{2\pi}{4},$$

siendo o y e las velocidades normales de las ondas refractadas en la mica, y en la dirección de la perpendicular á la placa. Al salir de la mica la vibración elíptica así modificada, se convierte en otras dos vibraciones elípticas al entrar en el segundo cuarzo. Al emerger solo son útiles las componentes de la vibración sobre la dirección «exclusiva» del analizador.

Sean:

e^{itn}, la vibración al entrar en el primer cuarzo la onda plana que emerge del polarizador formando con el eje del microscopio un ángulo determinado, $tg\beta = K_o$;

α, el ángulo que la vibración del vector luz á la salida del polarizador forma con la dirección del eje mayor de una de las elipses en el cuarzo que simbólicamente, como en uno de los párrafos anteriores, representaremos por $\}\,\underline{\xi_1}\ \underline{\eta_1}\,\{$;

γ, el ángulo que el vector luz que emerge del polarizador, forma con una de las direcciones de que se habló en la mica;

γ, el ángulo que la dirección exclusiva del analizador forma con el eje mayor $(\underline{\xi}_1\ \underline{\eta}_1)$;

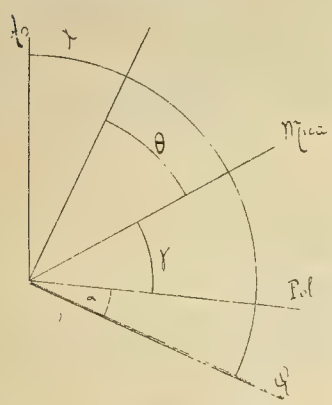


Fig. 4

θ, el ángulo que forma el eje mayor de la elipse que define el movimiento vibratorio del vector luz, á la salida de la mica con la dirección principal en ésta á que se refirió γ.

Las dos vibraciones elípticas en el primer cuarzo, en que se descompone la rectilínea que emerge del polarizador, serán, según lo dicho en el párrafo anterior, $(\beta' = o)$, $(\alpha' = \alpha)$

$$\underline{\xi}_1 = [\cos\alpha \cos\beta + i \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta] \cos\beta e^{i\tau t}$$

ó abreviadamente

$$\underline{\xi}_1 = G_1 \cos\beta\, e^{i\tau t}.$$

$$\underline{\eta}_1 = -[\cos\alpha \cos\beta + i \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta]\, i \operatorname{sen}\beta e^{i\tau t} = -G_1\, i \operatorname{sen}\beta e^{i\tau t},$$

$$\underline{\xi}_2 = [\cos\alpha \operatorname{sen}\beta - i \operatorname{sen}\alpha \cos\beta] \operatorname{sen}\beta e^{i\tau t} = G_2 \operatorname{sen}\beta e^{i\tau t},$$

$$\underline{\eta}_2 = [\cos\alpha \operatorname{sen}\beta - i \operatorname{sen}\alpha \cos\beta]\, i \cos\beta e^{i\tau t} = i \cos\beta\, G_2\, e^{i\tau t}.$$

Ésta última experimenta al atravesar el cuarzo, como ya hemos dicho, un retraso $e^{-i\delta}$. Designaremos por $\overline{\underline{\xi}}_2$, $\overline{\underline{\eta}}_2$ á las vibraciones así modificadas, es decir, en vez de G_2 se entenderá $G_2 e^{-i\delta}$. Así, pues, y según las dos direcciones señaladas de la mica, habrá las dos vibraciones (ε_1 es una constante de fase)

$$E = \left[\left(\underline{\xi}_1 + \overline{\underline{\xi}}_2\right) \cos(\gamma - \alpha) + \left(\underline{\eta}_1 + \overline{\underline{\eta}}_2\right) \operatorname{sen}(\gamma - \alpha)\right] e^{i\varepsilon_1}$$

$$F = \left[-\left(\underline{\xi}_1 + \overline{\underline{\xi}}_2\right) \operatorname{sen}(\gamma - \alpha) + \left(\underline{\eta}_1 + \overline{\underline{\eta}}_2\right) \cos(\gamma - \alpha)\right] e^{i\varepsilon_1}$$

que definen una vibración elíptica.

En la mica, experimenta F un retraso. Supongamos la de $\frac{1}{2}$ onda, F se convierte en $Fe^{-i\pi} = F'$. Así, representando por R la amplitud de la vibración E, por j su fase y por R' y l la amplitud y fase de la vibración F',

$$E = R\, e^{ij}\, e^{i\tau t}$$

$$F' = R' e^{li}\, e^{i\tau t}$$

Para poder aplicar la fórmula hallada en el párrafo anterior, correspondiente á la entrada y propagación de una onda polarizada elípticamente al través de un cuarzo, hace falta conocer la relación entre los ejes de la elipse y la posición del eje mayor de ésta. Eliminando el tiempo entre los valores de E y F, se tiene la ecuación de la elipse. La posición y razón de los ejes de la misma se hallarán por las fórmulas siguientes (*):

$$tg\,\sigma = \frac{R'}{R},$$

$$tg\,2\theta = \cos(l - j)\,tg\,2\sigma,$$

$$\operatorname{sen} 2\beta' = \operatorname{sen}(l - j)\operatorname{sen} 2\sigma,$$

contado θ en sentido contrario del de las agujas de un reloj, ó sentido positivo. Se supone siempre $\beta' < \frac{\pi}{4}$.

Llamando ε_2 á una nueva constante de fase, las componentes según los ejes de la vibración elíptica á la salida de la mica, serán

$$\equiv = G\,\beta'\,e^{i(\tau t + \varepsilon_2)},$$

$$H = i\,G \operatorname{sen} \beta'\,e^{i(\tau t + \varepsilon_2)}.$$

Respecto de G debemos observar, que representada por G^2 la energía del movimiento vibratorio, como debe conservarse íntegra la que tenía la vibración á la salida del polarizador, $G = 1$.

La vibración elíptica últimamente considerada se descompondrá en dos, como antes la lineal, de modo que llamando ($\equiv_1 H_1$), ($\equiv_2 H_2$) á las componentes de las vibraciones levogiras ó dextrogiras, según sus ejes, por ser el segundo cuarzo enteramente igual al primero en espesor y signo,

$$\equiv_1 = M_1 \cos\beta\,e^{i(\tau t + \varepsilon_2)},$$

$$H_1 = -i M_1 \operatorname{sen}\beta\,e^{i(\tau t + \varepsilon_2)},$$

$$\equiv_2 = M_2 \operatorname{sen}\beta\,e^{i(\tau t + \varepsilon_2)}$$

$$H_2 = i M_2 \cos\beta\,e^{i(\tau t + \varepsilon_2)},$$

en donde poniendo $\alpha' = \alpha t \gamma + \theta$,

$$M_1 = \cos\alpha' \cos(\beta - \beta') + i \operatorname{sen}\alpha' \operatorname{sen}(\beta + \beta')$$

$$M_2 = \cos\alpha' \operatorname{sen}(\beta - \beta') - i \operatorname{sen}\alpha' \cos(\beta + \beta')$$

La ($\equiv_2$, H_2) experimenta un retraso $e^{-i\delta}$, de modo que al salir del

(*) El lector puede deducir estas fórmulas, que se encuentran en algunos tratados de Geometría analítica ó de Mecánica.

cuarzo se habrá convertido en $(\overline{\equiv}_2, \overline{H}_2)$ en que las rayas superiores indican que M_2 se supone substituída por $M_2 e^{-i\delta}$.

Por fin, de las vibraciones elípticas $\equiv_1$, H_1 y $(\overline{\equiv}_2, \overline{H}_2)$, no quedan más que sus componentes sobre el analizador, de modo que al salir de este, la intensidad es, según vimos al final del párrafo anterior,

$$Z = \operatorname{sen}^2 \beta' + \cos 2\beta' \times$$
$$\left\{ \begin{array}{l} [\cos(\chi - \alpha - \gamma - \theta) \cos \delta/2 + \operatorname{sen}(\chi - \alpha - \gamma - \theta) \operatorname{sen} 2\beta \operatorname{sen} \delta/2]^2 \\ + \cos^2(\chi + \alpha + \gamma + \theta) \cos^2 2\beta \operatorname{sen}^2 \delta/2 \end{array} \right\}$$
$$+ \operatorname{sen} 2\beta' \cos 2\beta [\cos 2\chi \operatorname{sen} 2\beta \operatorname{sen} 2\delta/2 - \operatorname{sen} 2\chi \operatorname{sen} \delta/2 \cos \delta/2].$$

XIII

Vamos á aplicar las fórmulas anteriores al caso de ser la mica de media onda.

Se tendrá, como ya se ha dicho,

$$F' = F e^{-i\pi} = -F,$$

y $R e^{ij} = R \cos j + i R \operatorname{sen} j =$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \cos\alpha \cos^2\beta + \frac{i}{2} \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen} 2\beta + \\ + \cos\alpha \operatorname{sen}^2\beta e^{-i\delta} - \frac{i}{2} \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen} 2\beta e^{-i\delta} \end{array} \right\} \cos(\gamma + \alpha)$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} -\frac{i}{2} \cos\alpha \operatorname{sen} 2\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}^2\beta + \frac{i}{2} \cos\alpha \operatorname{sen} 2\beta e^{-i\delta} \\ + \operatorname{sen}\alpha \cos^2\beta e^{-i\delta} \end{array} \right\} \operatorname{sen}(\gamma + \alpha),$$

$R \cos j =$

$$= \left[\cos\alpha \cos^2\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}^2\beta \cos\delta - \frac{1}{2} \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen} 2\beta \operatorname{sen}\delta \right] \cos(\gamma + \alpha)$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}^2\beta + \frac{1}{2} \cos\alpha \operatorname{sen} 2\beta + \operatorname{sen}\delta + \operatorname{sen}\alpha \cos^2\beta \cos\delta \right] \operatorname{sen}(\gamma + \alpha),$$

que escribiremos abreviadamente

$$R \cos j = [1] \cos(\gamma + \alpha) + [2] \operatorname{sen}(\gamma + \alpha),$$

$R \operatorname{sen} j =$

$$\left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen} 2\beta - \cos\alpha \operatorname{sen}^2\beta \operatorname{sen}\delta - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen} 2\beta \cos\delta\right]\cos(\gamma+\alpha) +$$

$$\left[-\frac{1}{2}\cos\alpha \operatorname{sen} 2\beta + \frac{1}{2}\cos\alpha \operatorname{sen} 2\beta \cos\delta \operatorname{sen}\alpha \cos^2\beta \operatorname{sen}\delta\right]\operatorname{sen}(\gamma+\alpha),$$

ó abreviadamente

$$R \operatorname{sen} j = [3]\cos(\gamma+\alpha) + [4]\operatorname{sen}(\gamma+\alpha):$$

de donde

$$tg\, j = \frac{[3]\cos(\gamma+\alpha) + [4]\operatorname{sen}(\gamma+\alpha)}{[1]\cos(\gamma+\alpha) + [2]\operatorname{sen}(\gamma+\alpha)}$$

$$R^2 = \left[[1]\cos(\gamma+\alpha) + [2]\operatorname{sen}(\gamma+\alpha)\right]^2 + \left[[3]\cos(\gamma+\alpha) + [4]\operatorname{sen}(\gamma+\alpha)\right]^2.$$

Análogamente

$$R' \cos l' = [1]\operatorname{sen}(\gamma+\alpha) - [2]\cos(\gamma+\alpha)$$
$$R' \operatorname{sen} l' = [3]\operatorname{sen}(\gamma+\alpha) - [4]\cos(\gamma+\alpha)$$

y, por tanto,

$$tg\, l' = \frac{[3]\operatorname{sen}(\gamma+\alpha) - [4]\cos(\gamma+\alpha)}{[1]\operatorname{sen}(\gamma+\alpha) - [2]\cos(\gamma+\alpha)}$$

$$R'^2 = \left[[1]\operatorname{sen}(\gamma+\alpha) - [2]\cos(\gamma+\alpha)\right]^2 + \left[[3]\operatorname{sen}(\gamma+\alpha) - [4]\cos(\gamma+\alpha)\right]^2.$$

Para el centro del campo ó para ondas propagándose en la dirección del eje del cuarzo, $\beta = 45^0$. Para otros puntos $\beta = 45 + \Delta$, siendo Δ una cantidad negativa. Desarrollando los senos y cosenos de β en función de Δ,

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \Delta - \frac{\Delta^2}{2} - \frac{\Delta^3}{2.3} + \frac{\Delta^4}{2.3.4}\cdots\cdots\right),$$

$$\operatorname{sen} 2\beta = 1 - 2\Delta^2 + \frac{2}{3}\Delta^4 \cdots\cdots$$

$$\operatorname{sen}^2\beta = \frac{1}{2}\left(1 + 2\Delta - \frac{4}{3}\Delta^3 \cdots\cdots\right),$$

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{2.3}{\Delta^3} + \frac{\Delta^4}{2.3.4}\cdots\cdots\right),$$

$$\cos 2\beta = -2\Delta + \frac{4}{4}\Delta^3 \cdots\cdots$$

$$\cos^2\beta = \frac{1}{2}\left[1 - 2\Delta + \frac{3}{4}\Delta^3 \cdots\cdots\right],$$

$$\cos^2 2\beta = 4\Delta^2 - \frac{16}{3}\Delta^4 \cdots\cdots$$

Consideremos por ejemplo el caso en que $\gamma = 90$, $\chi - \alpha = 90$. Quedándonos con los términos de segundo grado en Δ

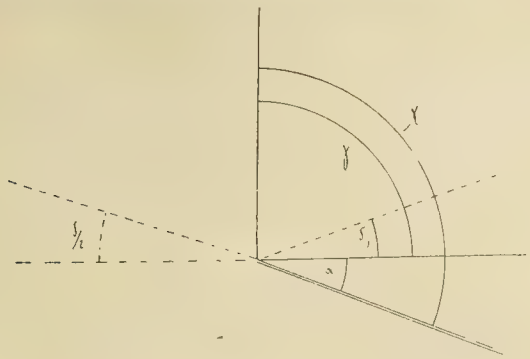


Fig. 5

$$R \cos j = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \delta \, [1 + 2\Delta \operatorname{sen} 2\alpha \operatorname{tg} \delta/_2 - 2\Delta^2],$$

$$R \operatorname{sen} j = - \operatorname{sen}^2 \delta/_2 \, [1 - 2\Delta \operatorname{sen} 2\alpha \cot \delta/_2 - 2\Delta^2],$$

$$R' \cos l = + \cos^2 \delta/_2 \, [1 - 2\Delta \operatorname{tg}^2 \delta/_2 \cos 2\alpha],$$

$$R' \operatorname{sen} l = - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \delta \, [1 - 2\Delta \cos 2\alpha],$$

de donde

$$\operatorname{tg} j = - \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \left[1 - 2\Delta \operatorname{sen} 2\alpha \, [\operatorname{tg} \delta/_2 + \cot \delta/_2] \right],$$

$$j = - \frac{\delta}{2} + 2\Delta \operatorname{sen} 2\alpha,$$

$$\operatorname{tg} l = - \operatorname{tg} \delta/_2 \left[1 + 2\Delta \cos 2\alpha \, [1 + \operatorname{tg}^2 \delta/_2] \right],$$

$$l = - \delta/_2 - 2\Delta \cos 2\alpha \operatorname{tg} \delta/_2,$$

$$l - j = -2 \, (\cos 2\alpha \operatorname{tg} \delta/_2 + \operatorname{sen} 2\alpha) \, \Delta,$$

$$R = \pm \operatorname{sen} \frac{\delta}{2}, \qquad R' = \pm \cos \frac{\delta}{2};$$

de esta doble determinación de signos tomaremos

$$R = \operatorname{sen} \delta/_2, \qquad R' = \cos \delta/_2,$$

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{R'}{R} = \cot \delta/_2 = \operatorname{tg} (90 - \delta/_2); \qquad \sigma = 90 - \delta/_2$$

$$\operatorname{tg} 2\theta = \cos (l - j) \operatorname{tg} 2\sigma = \operatorname{tg} (180 - \delta),$$

$$\theta = 90 - \delta/_2.$$

La determinación de signos al extraer la raíz cuadrada, así como el número de semicircunferencias que deben añadirse á un arco cuya tangente se conoce para determinar el arco, los obtenemos fácilmente observando lo que ocurre en la propagación de la onda cuya normal coincide con el eje del cuarzo. Al salir, en efecto, del primer cuarzo, la dirección del vector v, w ha girado $\delta/_2$ como rotación del plano de polarización, y como la dirección principal (1) de la mica se supone á 90° de la dirección exclusiva del polarizador, el ángulo que la dirección de v, w al entrar en la mica forma con la principal de esta vale $90 - \delta/_2$. Pero como á la componente de v, w sobre la otra dirección principal componente F le ocurre el retraso $e^{-i\pi}$, se cambia la componente F por $-F$, es decir que el vector luz v, w se cambia por su simétrico respecto de la dirección principal de la mica (1). Así se comprende que si $\delta/_2$ es $< 90^0$, $-F$ tenga que ser positivo, y θ valga $(90 - \delta/_2)$. Los valores de l y j se han determinado con estas condiciones también

$$\operatorname{sen} 2\beta' = \operatorname{sen}(l - j) \operatorname{sen} 2\sigma = -2 \operatorname{sen} \delta (\cos 2\alpha \operatorname{tg} \delta/_2 + \operatorname{sen} 2\alpha)\Delta$$

$$\beta' = -\Delta \operatorname{sen} \delta (\cos 2\alpha \operatorname{tg} \delta/_2 + \operatorname{sen} 2\alpha) = -2\Delta \operatorname{sen} \delta/_2 \operatorname{sen}(2\alpha + \delta/_2).$$

Substituyendo en la expresión de la intensidad será

$$Z = 4\Delta^2 \operatorname{sen}^2 \delta/_2 \operatorname{sen}^2 (2\alpha + \delta/_2) + 4\Delta^2 \operatorname{sen}^2 \delta/_2 \operatorname{sen}^2 (2\alpha + \delta/_2) +$$
$$+ 8\Delta^2 \operatorname{sen} \delta/_2 \operatorname{sen}(2\alpha + \delta/_2) [-\cos 2\alpha \operatorname{sen}^2 \delta/_2 + \operatorname{sen} 2\alpha \operatorname{sen} \delta/_2 \cos \delta/_2]$$
$$= (2 \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} 2\alpha)^2 \Delta^2.$$

Hay, pues, dos direcciones con obscuridad correspondientes á $\alpha = o$, y $\alpha = \frac{\pi}{2}$, es decir coincidiendo con las direcciones exclusivas del polarizador y analizador. Para $\Delta = o$, $Z = o$, lo cual era de esperar, puesto que la vibración rectilínea que entra en el primer cuarzo es desviada por este un cierto ángulo $\delta/_2$. Cambia la mica, como hemos dicho, esta desviación por la simétrica respecto á la dirección principal (1), y al atravesar el segundo cuarzo del mismo signo que el primero pasa á tener el vector luz v, w, la misma dirección que el polarizador, y por tanto normal al analizador. Luego la onda central no pasa al través del sistema.

La suma de las intensidades en dos direcciones perpendiculares, por ejemplo, la exclusiva del analizador y su perpendicular, siendo ambas normales al eje del cuarzo, ha de ser igual á 1, luego la intensidad en el caso de ser paralelas las secciones exclusivas del polarizador y analizador será

$$Z = 1 - (2 \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} 2\alpha)^2 \Delta^2.$$

Para el caso en que $\gamma = 45$, $\chi - \alpha = 90^o$,

$$R \cos j = \cos \frac{90 - \delta}{2} \cos \delta/_2 - 2\Delta \cos (45 + 2\alpha) \operatorname{sen}^2 \delta/_2,$$

$$R \operatorname{sen} j = - \cos \frac{90 - \delta}{2} \operatorname{sen} \delta/_2 - 2\Delta \operatorname{sen} \delta/_2 \cos \delta/_2 \cos (45 + 2\alpha)$$

$$R' \cos l = \operatorname{sen} \frac{90 - \delta}{2} \cos \delta/_2 - 2\Delta \operatorname{sen} (45 + 2\alpha) \operatorname{sen}^2 \delta/_2,$$

$$R' \operatorname{sen} l = - \operatorname{sen} \frac{90 - \delta}{2} \operatorname{sen} \delta/_2 - 2\Delta \operatorname{sen} \delta/_2 \cos \delta/_2 \operatorname{sen} (45 + 2\alpha),$$

$$j = - \delta/_2 - \Delta^2 \frac{\operatorname{sen} \delta/_2 \operatorname{sen} (45 - 2\alpha)}{\cos (45 - \delta/_2)},$$

$$l = - \delta/_2 - 2\Delta \operatorname{sen} \delta/_2 \frac{\cos (45 - 2\alpha)}{\cos (45 - \delta/_2)},$$

$$l - j = - 4 \frac{\operatorname{sen} \delta/_2}{\cos \delta} \operatorname{sen} (2\alpha + \delta/_2),$$

$$R = \cos \frac{90 - \delta}{2}, \qquad R' = \operatorname{sen} \frac{90 - \delta}{2},$$

$$\sigma = \frac{90 - \delta}{2}, \qquad \theta - \frac{90 - \delta}{2},$$

$$\beta' = - 2 \operatorname{sen} \delta/_2 \operatorname{sen} (2\alpha + \delta/_2),$$

y, por tanto,

$$Z = 1 - (4 \operatorname{sen}^2 \delta/_2 \cos 2\alpha)^2 \Delta^2.$$

Si hubiéramos supuesto $\gamma - \alpha = o$,

$$Z = (4 \operatorname{sen}^2 \delta/_2 \cos 2\alpha)^2 \Delta^2.$$

La figura indica las direcciones sucesivas de v, w, en el caso considerado.

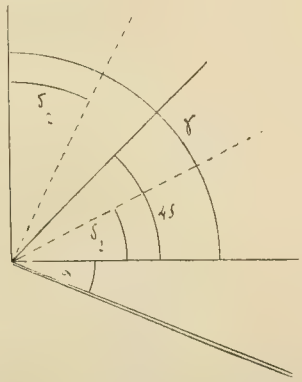


Fig. 6

Se comprende desde luego que para una posición cualquiera del polarizador y analizador, si la dirección (1) de la mica biseca el ángulo de las exclusivas de ellos, habrá en el centro del campo intensidad 1. Porque el primer cuarzo gira la dirección de v w, de un ángulo $\delta/_2$ siendo como ya sabemos δ en este caso la diferencia de fase de las dos vibraciones circulares que se propagan según el eje. Supongamos levogiro el cuarzo. El giro es hacia la izquierda. Al salir de la mica la direc-

ción de $v\ w$ es simétrica de la primera respecto de la dirección principal 1, luego al salir del segundo cuarzo por el nuevo giro hacia la izquierda de $\frac{\delta}{2}$ que experimenta $v\ w$, coincidirá su dirección con la exclusiva del analizador. Y por tanto la vibración no se reduce. Sucede lo contrario, como es consiguiente, con el polarizador y analizador dispuestos de modo que sus direcciones exclusivas sean una misma.

XIV

Consideraremos en este párrafo el caso de que la mica interpuesta sea de $\frac{1}{4}$ onda. Desde luego, la vibración E será la misma, y la F se convertirá en $F'' = Fe^{\frac{-i\pi}{2}}$. Como $F' = Fe^{-i\pi}$, $-iF'' = F'$, luego $F'' = iF'$, y por tanto llamando R'' y l'' á los valores correspondientes de R' y l del caso anterior

$$R'' \cos l'' + iR'' \operatorname{sen} l'' = i\,[R' \cos l + iR' \operatorname{sen} l]$$

$$R'' \cos l'' = -R' \operatorname{sen} l$$

$$R'' \operatorname{sen} l'' = R' \cos l.$$

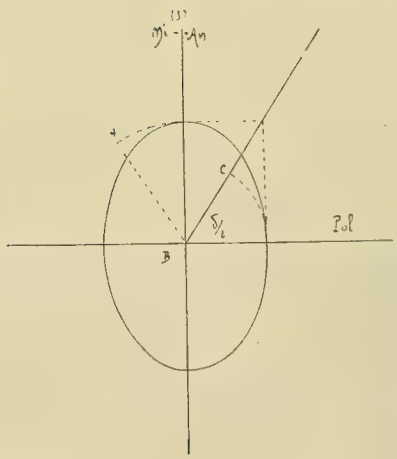


Fig. 7

Con objeto de deducir de aquí los valores de l'' y R'', estudiaremos como en casos anteriores la modificación de la vibración de la onda que se propaga según el eje del cuarzo.

El vector $v\ w$, desviado de su posición paralela á la exclusiva del polarizador, un ángulo $\delta/2$ al atravesar el primer cuarzo, se descompone en dos al entrar en la mica, en la forma que la figura indica. Al salir de la mica se tiene la vibración elíptica que representa la elipse dibujada. Evidentemente, $\sigma = -(90^\circ - \delta/2)$. Además $R = \cos(90^\circ - \delta/2)$, $R'' = -\cos \delta/2$. Con esto queda determinado l'', pues tenemos $R'' = -R'$, y por tanto

$$\cos l'' = \operatorname{sen} l$$

$$\operatorname{sen} l'' = -\cos l.$$

Si suponemos $l = l' + 90$ se satisfacen las dos ecuaciones anteriores. En consecuencia, inmediatamente podemos escribir

$$l'' - j = l - j + 90 = -\frac{2 \operatorname{sen}(2\alpha + \delta/_2)}{\cos \delta/_2} + 90.$$

Si queremos hallar los términos de segundo grado en Δ en la expresión de la intensidad, es necesario conocer la expresión de tg σ hasta el término en Δ^2. Partiendo de las expresiones de R y R' en que entran los términos en Δ^2

$$R^2 \operatorname{sen}^2 \delta/_2 - 4\Delta^2 \operatorname{sen}^2 \delta/_2 \cos^2 2\alpha,$$

$$(R')^2 = (-R'')^2 = \cos^2 \delta/_2 + 4\Delta^2 \operatorname{sen}^2 \delta/_2 \cos^2 2\alpha,$$

se tiene

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{R''}{R} = -\cot \frac{\delta}{2} \left[1 + \frac{2 \cos^2 2\alpha}{\cos^2 \delta/_2} \Delta^2\right]$$

é inmediatamente

$$\sigma = -(90 - \delta/_2) - 4 \cos^2 2\alpha \operatorname{tg} \delta/_2 \, \Delta^2;$$

$$\operatorname{tg} 2\theta = \operatorname{tg} 2\sigma \cos(l - j) = \frac{-4\Delta \operatorname{sen} \delta/_2 \operatorname{sen}(2\alpha + \delta/_2)}{\cos \delta}$$

y por tanto

$$\theta = \frac{-2\Delta \operatorname{sen} \delta/_2 \operatorname{sen}(2\alpha + \delta/_2)}{\cos \delta}.$$

Además

$$\operatorname{sen} 2\beta' = -\left(1 - \frac{2 \operatorname{sen}^2(2\alpha + \delta/_2)}{\cos^2 \delta/_2} \Delta^2\right) \operatorname{sen} 2\sigma =$$

$$= \operatorname{sen} \delta - \frac{4\Delta^2 \operatorname{sen} \delta/_2}{\cos \delta/_2} [\operatorname{sen}^2(2\alpha + \delta/_2) + \cos \delta \cos^2 2\alpha]$$

y por tanto

$$\beta' = 90 - \delta/_2 + \frac{2 \operatorname{sen} \delta/_2}{\cos \delta/_2} \Delta^2 [\operatorname{sen}^2(2\alpha + \delta/_2) + \cos \delta \cos^2 2\alpha].$$

En consecuennia, resulta para la intensidad Z

$$Z = \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \delta + 4\Delta \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen}^2 \delta/_2 \cos 2\alpha - 8\Delta^2 \cos^2 2\alpha \operatorname{sen}^2 \delta/_2 \cos \delta.$$

Para el centro del campo la intensidad vale $\frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \delta$. Esto era de esperar, pues girando el segundo cuarzo $\delta/_2$ á los dos vectores v w dirigidos según los ejes de la elipse que figura la vibración al salir de la mica, la intensidad sobre el analizador y cuya dirección exclusiva

coincide con la (1) de la mica, será la correspondiente al vector proyección de AB y CB ó sea, será de la forma

$$AB \cos \delta/_2 \cos \frac{2\pi t}{T} + CB \operatorname{sen} \delta/_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T},$$

y como $AB = \operatorname{sen} \delta/_2$ y $BC = \cos \delta/_2$

$$\frac{1}{2} \operatorname{sen} \delta \cos \frac{2\pi t}{T} + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T}$$

y la intensidad de una vibración rectilínea de esta naturaleza es desde luego la suma de los cuadrados de los coeficientes de $\cos \frac{2\pi t}{T}$ y $\operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T}$, es decir $\frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \delta$

XV

La intensidad Z del párrafo anterior, se anula para todos los valores de δ de la forma $\delta = 2K\pi$, siendo K un número cualquiera. Esto da en el campo un sistema de círculos concéntricos. Para puntos próximos al centro del campo, nos podemos valer de la fórmula aproximada

$$Z = \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \delta + 4\Delta \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen}^2 \delta/_2 \cos 2\alpha$$

que se anula para

$$\cos \delta/_2 + 4\Delta \operatorname{sen} \delta/_2 \cos 2\alpha = o,$$

que corresponde á un valor de Δ (Δ es negativo como ya sabemos),

$$\Delta = \frac{-\cot \delta/_2}{\cos 2\alpha}.$$

Para valores de α comprendidos entre $\frac{\pi}{4}$ y $-\frac{\pi}{4}$ ó entre $\pi - \frac{\pi}{4}$ y $-\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$, para puntos comprendidos dentro del círculo $\delta = \pi$, habrá valores de Δ que satisfarán la anterior igualdad, es decir puntos en sombra que formarán como dos manchas á cada lado del centro bisecadas por la dirección exclusiva del polarizador. No habrá valores de Δ que satisfagan la anterior ecuación para $\alpha > \frac{\pi}{4}$ ó $< -\frac{\pi}{4}$ ó no comprendidos entre $\pi - \frac{\pi}{4}$ y $-\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$, á menos que estén fuera

del círculo $\delta = \pi$, pues para estos valores cos 2α es negativo. Desde luego para los valores de α que anulen al coseno de su duplo, y con las direcciones límites anteriores, no hay anulación de la intensidad. Habrá por consiguiente cuatro manchas, pero aquellas cuya línea de unión es paralèla á la sección exclusiva del polarizador serán mucho mayores, porque la variación de δ es mucho más lenta cuanto más cerca del centro nos encontremos. (Véase el valor de δ en función del ángulo de incidencia). Para las dos manchas primeramente descritas, es decir para valores de α comprendidos entre $+\frac{\pi}{4}$ y $-\frac{\pi}{4}$ y sus simétricos respecto á la sección exclusiva del analizador, se tendrá que al aumentar α disminuye el cos 2α y por lo tanto aumenta el quebrado. Suponiendo que la variación de Δ es mucho más lenta que la de δ, esto obliga á buscar los puntos que satisfacen la ecuación anterior más cerca del círculo $\delta = \pi$ aunque sin salir del mismo. Se comprende, que por estar las otras dos manchas más allá del círculo $\delta = \pi$, la influencia del término en Δ^2 se hará sentir mucho más que en el caso de las otras manchas, y precisamente el término en Δ^2 es máximo para los puntos que corresponden á estas manchas, al revés de lo que ocurre con las otras donde es negativo, y representa por lo tanto disminución de Z. Así se comprende que no se hayan observado.

Para puntos más alejados del centro, en los que Δ^2 tenga importancia, la intensidad se anula siempre que

$$\Delta \cos \alpha = \frac{1}{2} \frac{\cos \delta/_2}{\cos \delta/_2 - \operatorname{sen} \delta/_2}$$

ó bien

$$\Delta \cos \alpha = -\frac{1}{2} \frac{\cos \delta/_2}{\cos \delta/_2 + \operatorname{sen} \delta/_2}$$

pues los dos valores indicados de $\Delta \cos \alpha$ son las raíces de la ecuación de segundo grado $Z = o$. Llamando x_1 al primer valor y x_2 al segundo, he aquí una serie de valores de $\Delta \cos \alpha$ que permitirán formar idea de la variación de la misma

$\delta = 0$	$x_1 = 0{,}5$	$x_2 = -0{,}5$
$\delta = 2^o$	0,5088	— 0,4913
$\delta = 4^o$	0,517	— 0,4853
$\delta = 8^o$	0,538	— 0,467
$\delta = 20^o$	0,602	— 0,425
$\delta = 80^o$	3,101	— 0,271
$\delta = 90^o$	∞	— 0,25
$\delta = 120^o$	— 0,683	— 0,183

$\delta = 160^\circ$	$-0{,}106$	$-0{,}0729$
$\delta = 180^\circ$	0	0
$\delta = 200^\circ$	$0{,}0729$	$0{,}106$
$\delta = 250^\circ$	$0{,}205$	$1{,}164$
$\delta = 270^\circ$	$0{,}25$	∞
$\delta = 280$	$0{,}264$	$-3{,}8$
$\delta = 360$	$0{,}5$	$-0{,}5$

Las dos funciones x_1 y x_2 admiten el período 2π,

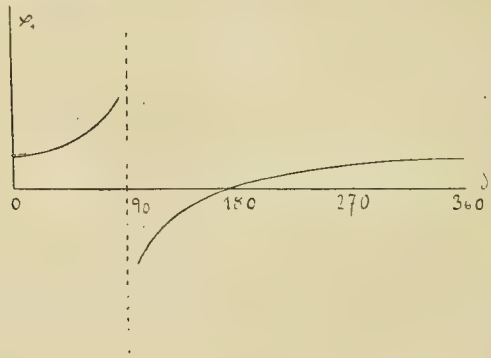


Fig. 8

No nos proponemos un estudio profundo de estas funciones x_1 y x_2 sino solamente ver la variación de las mismas aproximadamente. Las figuras 8, 9 y 10 construídas tomando como base los valores precedentes servirán para dar idea.

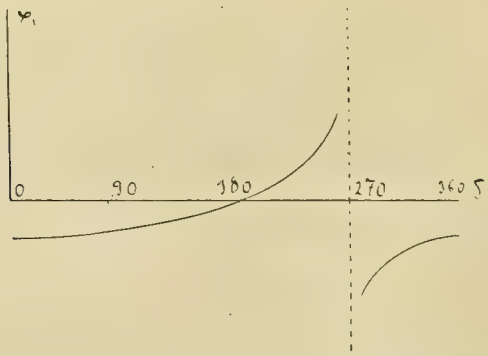


Fig. 9

Ahora bien, Δ es una cantidad pequeña y negativa. Admitiremos que en su variación es una curva de las que vamos á estudiar para las que $Z = o$, es muy pequeña. Así dividiendo las ordenadas de las curvas anteriores por Δ, encontraremos los valores de cos 2α.

Admitimos para Δ el valor 0,3, por ejemplo (*). Para obtener valores reales para α, solo podremos aprovechar la región de las curvas anteriores alrededor del valor $\delta = \pi$, entre dos ordenadas menores que 0,3. Fijémonos en x_1. Para los valores de $\delta < \pi$ ó menores que 3π, 5π, etc., pero mayores que el valor de δ que corresponde á la ordenada 0,3, valor que corresponderá aproximadamente á $\delta = 140$ ó $140 + K2\pi$, cos 2α adquiere valores positivos que van disminuyendo hasta anularse partiendo del valor 1 que alcanza para $\delta = 140$ ó $140 + 2K\pi$. Luego α varía de 0 á $\frac{\pi}{4}$ ó $-\frac{\pi}{4}$ y de π á $\pi - \frac{\pi}{4}$ ó $-\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$. Para la otra región de la derecha de π, hasta el punto

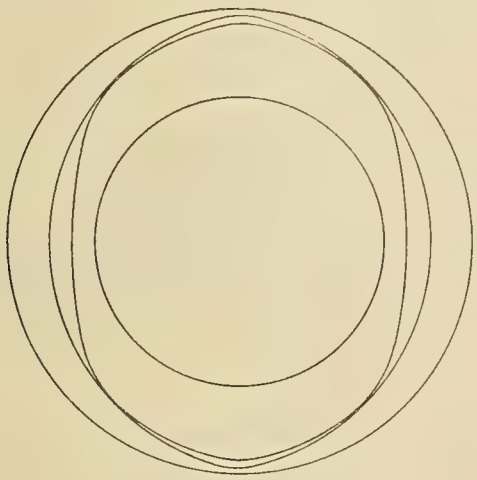


Fig 10

cuya ordenada es 0.3, que corresponde aproximadamente á $\delta = 320^\circ$, cos 2α es negativo, y varía de 0 á 1, de este modo la curva acaba de formar como un óvalo pues α varía así de $+\frac{\pi}{4}$ á $\pi - \frac{\pi}{4}$, y de $-\frac{\pi}{4}$ á $-\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$. La distancia del centro al punto donde la curva corta á la dirección exclusiva del polarizador expresada en δ es $\delta = 140$, en cambio al punto donde corta á la exclusiva del analizador es $\delta = 320$.

La Δ cos 2α correspondiente á x_i es análoga, tiene también la forma de un óvalo, pero aun cuando pasa por los puntos en que el óvalo

(*) Como Z ha de ser siempre positiva, la fórmula anterior para Z solo vale dentro del círculo $\Delta = \mu$ para el que Z es siempre positiva El valor 0,3 está en el interior de este círculo.

primero corta á las direcciones á 45° de las exclusivas del polarizador y analizador, corta á la primera de estas más cerca del centro, para puntos que corresponderán á $\delta = 50^\circ$ aproximadamente, y á la segunda más cerca también para puntos que corresponderán á $\delta = 230^\circ$ aproximadamente ó á $\delta = 50 + 2K\pi$ y $\delta = 230 + 2\pi K$ respectivamente.

El aumento que Δ experimenta al alejarnos del centro, hace que los puntos en que los dos óvalos cortan á la dirección exclusiva del analizador estén más alejados del centro más de lo que hemos dicho.

Las dos curvas descritas se confunden en la experiencia, y el campo aparece formado por una serie de circunferencias y óvalos que parecen elipses bitangentes á ellas. La teoría da pues, acertada cuenta del fenómeno.

XVI

Los valores de Z en los párrafos anteriores no sirven para ciertos valores especiales de δ, para los cuales son ilícitos los desarrollos en serie. Mas es fácil ver, que para los valores $\delta = \pi$, $\delta = 2\pi$, los valores que se obtienen para Z no difieren de los que dan las fórmulas encontradas en que estos valores se hallaban exceptuados.

Esteban Terradas,
Catedrático de Acústica y Óptica de Barcelona,

INFLUENCIA

de la forma de las masas líquidas que fermentan, en la cantidad de alcohol producido y en la duración del fenómeno

---

Nuestras investigaciones hacia este objeto de indudable interés para el estudio de las industrias donde se realizan fermentaciones de masas líquidas, comenzaron observando el trabajo de una raza del *saccharomyces ellysoideus* (levadura) sometiéndole, primero á una vida casi exclusivamente aerobia y después á condiciones de vida casi exclusivamente anaerobia. Para estas experiencias utilizamos como caldo de cultivo agua de *turaillons* azucarada al 10 por 100 con sacarosa y adicionada de un pequeña cantidad de fosfato ácido de amonio.

1.ª Experiencia. En seis placas Petri colocamos caldo de cultivo esterilizado, formando una capa de 2 mm. de espesor, sembrando después en cada una de ellas, una pequeñísima cantidad de la raza de *S. ellipsoideus* en cultivo puro, que nos sirve para este estudio: las placas fueron cubiertas de modo imperfecto y colocadas en una estufa á temperatura de 27°, teniendo cuidado de agitar alguna vez y con las debidas precauciones durante la fermentación del caldo sembrado. Al cabo de 86 horas, el azúcar había sido completamente desdoblado; en el líquido que fermentó no encontramos más que 0°,6 de alcohol, habiéndose producido un enorme depósito de levadura que resultó en peso muy próximamente 0,3 gramos por 10 c. c. de líquido. Conviene recordar ahora que la cantidad teórica de alcohol que se produce por la fermentación de un líquido azucarado al 10 por 100 de sacarosa ó su equivalente 10,5 por 100 de glucosa, es tal que podría obtenerse líquido alcohólico de 6°,7 y por la enorme diferencia entre la riqueza en alcohol encontrada y la teórica, nos encontramos frente á un caso de fermentación alcohólica, en la que por las condiciones en que se ha operado, solamente una insignificante cantidad de materia fermentescible produjo alcohol.

En esta experiencia, la levadura ha hecho vida aerobia y simultáneamente un resto de vida anaerobia representada por la pequeña cantidad de alcohol encontrado que fué producido indudablemente por la levadura depositada en el fondo de la placa á la que no llegó el oxígeno necesario para su completa vida aero-

bia. El desdoblamiento de la glucosa en esta experiencia podrá representarse muy aproximadamente por la igualdad:

$$C_6 H_{12} O_6 + 6 O_2 = 6 CO_2 + 6 H_2O$$

2.ª Experiencia. Dispusimos de varios tubos de vidrio de 0,25 metros de longitud por 0,015 m. de diámetro, extrangulados en la parte superior y llenos hasta muy cerca de la parte más estrecha de la región extrangulada con caldo de cultivo idéntico al empleado en la experiencia anterior, se sembraron con la misma raza de *S. ellipsoideus* en plena actividad y cerrados con tapón de algodón se colocaron en la estufa á temperatura de 27°. Hasta 42 días después de hecha la siembra, no fué desdoblado el azúcar en su totalidad; analizado el líquido fermentado encontramos una riqueza en alcohol de 6°,3 y una pequeñísima cantidad de levadura.

En esta experiencia, el fermento ha hecho una vida casi exclusivamente anaerobia, no teniendo más vida aerobia que la representada por la pequeñísima cantidad de levadura depositada deduciendo de ésta la que se sembró.

La aplicación del resultado de estas experiencias á la fabricación del alcohol, nos enseña que en un mismo mosto sembrado con una misma levadura, la cantidad de alcohol producido, será tanto mayor cuanto más se favorezca la vida anaerobia de la levadura, y el tiempo de duración del fenómeno de fermentación tanto menor, cuanto más se favorezca la vida aerobia.

Airear un mosto no es más que favorecer la vida aerobia del fermento, y por esto, la aireación que tanto se recomienda y muchas veces se practica sobre todo en vinicultura, aumenta la velocidad de la fermentación y en algunos casos realiza la continuación del fenómeno si por determinadas causas se hubiera paralizado.

El caso de preparación de levaduras ó la obtención de *pie de cuba* puede considerarse dentro de ciertos límites, como inverso al de la fabricación del alcohol; en él debe procurarse obtener sobre todo depósito de levadura en buenas condiciones de vigor, favoreciendo en lo posible la vida aerobia del microbio.

Refiriendo ahora exclusivamente la aplicación de estos hechos á la vinicultura, realizamos las siguientes experiencias:

1.ª En un vaso de vidrio cubierto con un disco de cartón, pusimos mosto de uva estirilizado (riqueza en glucósa 18 por 100) formando una capa de 0,06 m. de diámetro por 0,08 de altura (caso de los lagares).

2.ª En un frasco de vidrio cerrado con un tapón de algodón colocamos del mismo mosto que en la experiencia anterior formando una capa de 0,05 m. de diámetro por 0°03 de altura.

3.ª En un frasco de vidrio cerrado con un copo de algodón, pusimos del mismo mosto que en el anterior formando una capa de 0,06 m. de diámetro por 0,08 m. de altura (caso de los tinos ó conos).

Sembrados estos mostos con levadura pura de la misma edad y llevados á la estufa á temperatura de 27°, encontramos los siguientes resultados medios de repetidas experiencias análogas:

Primer caso. Terminada la fermentación al cabo de 11 días, riqueza alcohólica resultante, 10°,1 (1).

Segundo caso. Desdoblado el azúcar á los nueve días de hecha la siembra: grado alcohólico del líquido, 9°,9.

Tercer caso. Después de 12 días de fermentación y sin contener el líquido cantidad apreciable de glucosa, su grado alcohólico era 10°,8.

Deducimos de estas experiencias que para conseguir el mejor rendimiento en alcohol de un mosto destinado á la fermentación, debe disponerse de modo que forme en las vasijas donde fermenta cilindros cuya base sea menor que su altura, libres en lo posible de la acción del aire, y dentro de las condiciones que exigen los fenómenos de vida que en el transcurso de la fermentación se realizan.

En cuanto al tiempo de duración del fenómeno hay alguna diferencia en menos entre el deducido de estas experiencias, donde la masa que fermenta es pequeña, y el deducido en la práctica de la fermentación, donde las masas de mosto puestas á fermentar son enormemente mayores.

ANTONIO GREGORIO ROCASOLANO.

(1) El grado alcohólico á producir en un mosto de riqueza 18 por 100 con glucoso, es teóricamente 11°,5.

ORNITOLOGÍA DE ARAGÓN

POR EL R. P. LONGINOS NAVÁS, S. J.

(CONTINUACIÓN)

2.ª Familia Estúrnidos

Alas con diez rémiges primarias, la primera muy corta. Cola con 12 timoneras. Pico deprimido, con el borde liso ó un diente plano en el extremo, sin vibrisas, con aberturas nasales patentes. Tarso cubierto posteriormente por dos placas. Huevos azules.

9. Género **STURNUS** L.

Plumas de la cabeza estrechas y alargadas. Pico largo como la cabeza; abertura nasales al descubierto delante de las plumas de la frente. Alas largas y puntiagudas, la primera rémige de 1 — 2 centm. de largo, la segunda la más larga. Reflejos metálicos.

12. **Sturnus vulgaris** L. *Estornino.*—Región superior pardo obscura, inferior negra con manchitas blancas. Reflejos metálicos muy intensos. Ala 12 — 13 cm.; cola 6 — 7 cm.; pico 22 — 25 mm.

«Sturnus vulgaris. *Estornido* Funes p. 1905. Nostratibus *Tordo*. Circa Cæsaraugustam vulgatissimus: prostat in foro venalis». Asso.

Aragón (Mus. Univ.); Zaragoza (Mus. Col. Salv.).

13. **Sturnus unicolor** Temm.—De color uniforme negro pardusco, con brillo de carbón, con débiles reflejos purpúreos, las cobijas de las alas más rojas de púrpura; tarsos y dedos amarillos.

Citado de varias localidades de España, por Arévalo; no lo he visto de Aragón, donde debe de encontrarse.

10. Género **PASTOR** Temm.

Plumaje rosado, cabeza con moño en los adultos. Patas fuertes, con el dedo mediano de la longitud del tarso. Alas largas y puntiagudas, cola corta.

14. **Pastor roseus** L. *Estornino pastor.* — Cabeza y cuello hasta el buche negros, con reflejos purpúreos. Alas con sus cobi-

jas, y cola con las suyas negras con reflejos acerados. Ala 28 — 31 centímetros; cola 7 cm.; pico 17 — 20 mm.

Citado del mediodía de España y de Cataluña; si existe, debe de ser raro en Aragón.

3.ª Familia Oriólidos

Diez rémiges primarias, la primera bien desarrollada, la tercera la más larga. Doce timoneras. Tarsos cortos, cubiertos por detrás con dos placas. Pico con vibrisas; aberturas nasales descubiertas.

11. Género **ORIOLUS** L.

Caracteres de la familia. Comprende en Europa una sola especie.

15. **Oriolus galbula** L. *Oropéndola.*—Colores muy distintos en ambos sexos, ♂ adulto de un amarillo de oro casi en su totalidad, brida, occipucio y rémiges negras; ♀ adulta verde olivácea, con matices de amarillo en la nuca y más en el obispillo. Región inferior de un blanco sucio, con rasgos longitudinales negros. Rémiges pardas. Ala 15 — 16 cm.; cola 8 — 9 cm.; pico 23 — 26 mm.

«Oriolus Galbula. Hispanis *Oropéndola*: nostratibus *Turiol*, et *Papafigo*. Habitat Cæsaraugustæ, Oscæ. Femina a mare adeo diversa, ut minus peritis facile imponat ad novam speciem constituendam. Caput et dorsum virescentia: pectus et abdomen pallida striis fuscis. Remiges fuscæ. Oropygium flavum. Rectrices e fusco virescentes apicibus flavis, exceptis duabus intermediis. Pedes plumbei». Asso.

Aragón (Mus. Univ., Col. Salv.).

N. B. Aplicando con rigor extremo la ley de prioridad, debiera cambiarse el nombre técnico de esta especie, apellidada por Linneo *Coracias oriolus* (Syst. Nat. Ed. X, 1758) y más tarde *Oriolus galbula* (Syst. Nat. Ed. XII, 1766). Si conservamos el nombre específico primitivo y el genérico posterior incurriremos en la tautología *Oriolus oriolus*, á no ser que variásemos el nombre genérico y consiguientemente el de la familia, diciendo, por ejemplo, *Orius*, y de él *Oridos*. Lo preferible por más sencillo parece conservar los dos nombres, asímismo linneanos, *Oriolus galbula*, con que es designada esta especie en casi todos los autores.

4.ª Familia Fringílidos

Son los más propiamente llamados *Conirrostros*. Pico fuerte y cónico; mandíbula superior frecuentemente arqueada; aberturas

nasales patentes, cercanas á la base. Nueve rémiges primarias, por ser exigua y apenas visible la primera. Nidos al descubierto, á veces en agujeros. Huevos casi siempre punteados ó manchados, rara vez de un solo color. Granívoros é insectívoros.

Es familia numerosísima en especies é individuos.

12. Género **PYCNORHINUS** (1) Navás (=*Coccothraustes* Pall., nom. spec.)

Pico enormemente grueso y robusto, ancho y alto en la base; la anchura de la mandíbula inferior es próximamente igual á la altura del pico. Cola corta, cuadrada. Las tres primeras rémiges (prescindiendo de la abortiva) casi iguales en longitud, la cuarta más corta y mucho más las sigientes, escotadas en el lado externo del ápice. (Fig. 7.ª).

Fig. 7.ª

16. **Pycnorhinus coccothraustes** L. *Picogordo, Piñonero.* —Color general pardo rojizo claro; brida, barba, garganta, rémiges negras; pescuezo y lados del cuello grisáceos. Región inferior leonada, colores más vivos en la ♀. Ala 10 cm.; cola 53 — 57 mm.; pico 19 — 22 mm.

«Loxia coccothraustes. Hispanis *Casca piñones*. Habitat Cæsaraugustæ, circa Lituénigo». Asso.

Aragón (Mus. Univ.); Zuera (Duplá; Mus. Col. Salv.).

13. Género **LOXIA** L.

Fácilmente se distingue de los demás pájaros de Europa por el pico cruzado, bajando á la derecha la punta de la mandíbula superior y subiendo á la izquierda la de la mandíbula inferior. Aberturas nasales cubiertas por las vibrisas. Tarsos más cortos que el dedo mediano.

17. **Loxia curvirostra** L. *Pico-cruzado.*—De un color rojo ladrillo intenso, más pardo en el dorso, más vivo en el obispillo. Rémiges y timoneras pardas. Ala 99 — 102 mm.; cola 59 — 75 mm. Longitud de la mandíbula superior en línea recta 18 — 20 mm.; altura de la misma en la base 7'2 — 8'2 mm.; anchura de la mandíbula inferior en la base 10'8 — 11'4 mm.; altura de la misma 4 mm.

Fig. 8.ª

«Loxia curvirostra. Habitat circa Monroy in agro Alcannicensi, ubi *Piñerol* vocatur». Asso.

---

(1) Del griego πυκνός *grueso* y ῥίν, ῥινός, *nariz*; alusión al tamaño y grosor descomunal del pico.

El tipo (fig. 8.ª, *a*) que tengo á la vista, de Francia (Mus. Col. Salv.) no lo he visto de España.

Var. **hispana** Harr. (fig. 8.ª, *b*). Parecida en todo al tipo, pero con el pico visiblemente más delgado y largo. Longitud del pico en el ♂, 21 mm.; la altura de la mandíbula superior no llega á 7 mm.; anchura de la inferior 11 mm.

Águilas (Murcia); pero es creíble se extienda más en España; tal vez llegue á Aragón.

Var. **balearica** Hom. (Figura 8.ª, *c*). Notable por la mandíbula superior larga y muy arqueada, la inferior corta y gruesa. Alas muy cortas.

Mallorca. A. v. Homeyer, Journ. f. Orn. 1862, p. 256. Aragón. Refiero á esta variedad un ejemplar muy deteriorado del Museo de la Facultad de Zaragoza (Fig. 8.ª, *c*) Longitud de la mandíbula superior en línea recta 20'8 mm.; altura en la base 7'2 mm.; longitud de la mandíbula inferior 16 mm.; anchura 11'2; altura 4'8 mm.

14. Género **LIGURINUS** Koch. (= *Chloris* Cuv., nom. spec.)

Plumaje verde, alas largas y cola marcadamente escotada posteriormente. Pico cónico, grueso y corto, mucho más corto que la cabeza.

18. **Ligurinus chloris** L. *Verderón.*—De un verde oliváceo en el ♂. La ♀ es algo cenicienta, con la garganta y abdomen verde amarillentos. Rémiges y timoneras pardas, orilladas exteriormente de amarillo. Ala 87 — 90 mm.; cola 57 mm.; pico 12 — 14 mm.

«Loxia chloris. Nostratibus *Verderol* Funes p. 203. Habitat ubique frequens». Asso.

Zaragoza (Mus. Col. Salv.).

Var. **aurantiiventris** Cab. Región inferior verde amarilla, que pasa á puro amarillo de oro en el medio. Región superior de un verde vivo y amarillo de oro, con el borde de la frente del mismo color.

España (Hartet).

15. Género **ACANTHIS** Bechstein.

Pico fuerte, casi redondeado, con extremo puntiagudo, base como hinchada; aberturas nasales junto á la base, cubiertas por las plumas de la frente. Alas largas y agudas; primera rémige muy corta, 2 — 4 largas casi iguales, la segunda ó tercera la más larga. Cola mediana, escotada en medio como medio centímetro.

Tasos fuertes, cubiertos por delante con escudetes y por los lados con placa entera.

19. **Acanthis carduelis** L. *Jilguero.*—♂ adulto. Pico blanquecino, negro en la punta. Una faja roja carmesí rodea la base del pico; brida negra. Otra faja, blanca paralela á la anterior, interrumpida en el vértice, que es negro, lo mismo que la nuca. Lo restante pardo rojizo; pecho y vientre blanquecinos. Rémiges y timoneras negras, algunas blancas en la punta; las rémiges medianas en medio de un amarillo vivo; formando ancha faja. Ala 79 — 84 mm.; cola 50 mm.

La ♀ se distingue por su tamaño algo menor, faja de la cara roja pálida, anaranjada, más estrecha por debajo, collar blanco sucio, rojizo. Ala 76 — 78 mm.

«Fringilla carduelis. *Xilguero.* Funes p. 197. Nostratibus *Cardelina* Marcuello p. 254. Ubique frequens». Asso.

Zaragoza (Mus. Col. Salv., Colección Peñaranda, etc.).

20. **Acanthis spinus** L. *Solitario.*—Color general verde aceitunado manchado de negro y ceniza. Parte superior de la cabeza pardo negruzca. Rémiges segunda y tercera con una línea fina amarilla externa, la cuarta y siguientes pintadas de amarillo en la base. Timoneras negruzcas, orilladas de amarillo. ♂ Cuello y pecho amarillo vivo. ♀ más cenicienta; pecho y abdomen con manchas alargadas pardas. Ala 73 — 75 mm.; cola 45 — 49 mm.; pico 10 mm.

Castilla, Cataluña, etc. (Arévalo). No lo he visto de Aragón.

21. **Acanthis cannabina** L. *Chorlito, Pardillo* —Pico pardusco, tarsos pardos. E. Parte superior de la cabeza de un rojo carmesí vivo, el cual se extiende por todo el pecho hasta el abdomen; lo restante de la cabeza gris plomizo; lomo rojo de orín. Rémiges y timoneras pardo negruzcas, orilladas de blanco. ♀. Cabeza y cuello de un tinte pardo ó gris amarillento, con el tallo de las plumas más obscuro que las barbas; lomo pardo rojizo; garganta y parte superior del pecho pardo amarillento claro con manchas pardo negruzcas dispuestas longitudinalmente. Ala 82 - 85 mm.

«Fringilla cannabina. Nostratibus *Pajarel.* Cæsaraugustæ, et alibi frequens». Asso.

Casi toda Europa. Se tiene en domesticidad.

22. **Acanthis flavirostris** L. *Pajarel.*—Pico amarillo. Parte superior de la cabeza, nuca y cuello con manchas pardas y rojizas longitudinales; obispillo rojo (♂) ó rojizo (♀). Cara y garganta rojo amarillentas, con manchitas pardas á los lados del cuello. Pecho y costado sin manchas pardas. Región superior parda, con borde de las plumas rojizo. Abdomen blanco amarillento. Rémiges y

timoneras negras, con listas blancas. Ala 76 - 81 mm.; cola 64 — 66 mm.; pico 8 — 9 mm.

Ave de paso que se ha citado de varios sitios de España.

23. **Acanthis citrinella** L. *Verdaza.*—Tinte dominante verde amarillento. Estrías grisáceas en el lomo. Rémiges y timoneras pardas, orladas de verde amarillento. ♀ más pardusca. Pico córneo pardusco. Ala 76 mm.; cola 50 — 53 mm.; pico 8'5 mm.

Varias regiones de España (Arévalo). Zaragoza.

Clave de las especies del Género ACANTHIS

1. Pico rodeado en la base de una ancha faja de plumas de rojo carmesí interrumpida en la brida. . . . . *carduelis* L.

—Sin faja anular roja en la cabeza. 2

2. Color dominante el amarillo verdoso, sin manchas ó bandas rojas. Pico córneo pardusco, más claro por debajo. *citrinella* L.

—Color vario, con algún tinte amarillo ó manchas rojas. . 3

3. Pico amarillo, obispillo rojo rosado (♂) ó más pardo (♀). *flavirostris* L.

—Pico pardusco y obispillo de otro color, no rojo 4

4. ♂ Roja la parte superior de la cabeza y buena parte del pecho, lados del cuerpo no estriados de pardo. ♀ Cabeza y cuello grisáceos ó parduscos; región superior del cuerpo roja pardusca. *cannabina* L.

—Sin rojo en la cabeza y pecho. Dorso verde; flancos estriados de negro (♂); región inferior blanquecina. . . . . *spinus* L.

16. Género CHLORINDUS (1) nom. nov. (= *Serinus* Koch. nom. spec.)

Plumaje fino, verdoso. Pico corto, hinchado, abovedado; aberturas nasales cubiertas en parte por las plumillas de la frente. Alas medianas, obtusas, con las tres primeras rémiges casi iguales, las más largas; cola algo larga, bastante escotada posteriormente.

34. **Chlorindus serinus** L. *Verderillo.*—Región superior verde aceitunada con manchas alargadas negras; frente y rabadilla amarillas. Región inferior amarillo-verdosa. Ala con dos bandas transversales amarillas. Cola parda, subcaudales blancas. Pico cárneo obscuro por encima, cárneo claro por debajo. Tarsos pardo-cárneos. Ala 72 — 75 mm.; cola 50 — 52 mm.; pico 7 — 7'5 mm.

---

(1) χλωρός, *verde.*

«Fringilla mandibula inferiore albida, fronte, gula et pectore flavis. An varietas F. serini? Habitat Cæsaraugustæ et circa Epila, ubi *Gafarrón* apellatur. Dorsum et rectrices e fusco et flavo mixta; uropygium flavum; abdomen albidum; remiges et rectrices fuscæ. Vidi marem fronte et pectore e fusco virescentibus». Asso.

Común en España. Zaragóza!

N. B. Para Hartet el canario pertenece á la misma especie que el gafarrón. Si así fuera, podría llamarse al primero *Serinus canarius* L., y de él sería una variedad el gafarrón. Las diferencias entre uno y otro son muy marcadas, pudiéndose retenerse ambos como dos especies afines.

17. Género **PYRRHIA** (1) nom. nov. (= *Pyrrhula* Pall. nom. spec.)

Pico corto, en la base más ancho que alto, comprimido y arqueado por delante. Alas algo redondeadas; la primera rémige (visible) igual á la quinta; las 2 — 4 las más largas. Patas fuertes. Tarsos cortos, poco más largos que el dedo medio.

25. **Pyrrhia pyrrhula** L. *Camachuelo* —Cabeza, alas y cola negras con reflejos violados; una banda transversal de color de ceniza en el ala; región superior de este color; rabadilla y subcaudales blancas. ♂ Pecho rojo, con buena parte de la región inferior. Patas pardas. Ala 93 — 98 mm.; cola 68 — 72 mm.; pico 10 mm.

Var. **europæa** Vieill. Tamaño menor. El gris de la región es algo más obscuro, el rojo de la región inferior menos vivo. ♀ con frecuencia más obscura, pardusca. Ala ♂ 81 — 88'5 mm.

Ave de paso. En la época de la cría es abundante en los Pirineos y alto Aragón, según el Sr. Castellarnau (ap. Arévalo).

(Continuará).

---

(1) De πυρρός, *rojo*.

Teruelitas del Museo de Historia Natural de la Facultad de Ciencias de Zaragoza

Por ser la Teruelita, como indica su nombre, uno de los minerales más genuinamente aragoneses y también por la variedad de ejemplares que de dicho mineral existen en el Museo de esta Facultad, paréceme oportuno dar noticia en este breve artículo de las particularidades más notables que á ellos se refieren.

Yacimiento.—La mayor parte fueron por mí recogidos en las excursiones que durante los veranos de 1904 y 1905, hice por los alrededores de Teruel.

Al Norte de esta población y á corta distancia de la misma, extiéndese de Este á Oeste una estrecha faja triásica, cuyas margas rojas é irisadas la distinguen enseguida del mioceno que la circunda. Entre dichas margas y como producidas á expensas de la caliza de las mismas, se encuentran grandes masas yesosas muy compactas en ciertos estratos y deleznables y de aspecto sacarino en otros. Enclavados, pues, en estos yesos margosos, se hallan los cristales de Teruelita, si bien por la acción denudadora de las aguas, quedan con frecuencia libres y se les encuentra entonces esparcidos en los bordes de los senderos.

Aspecto y forma de los cristales.—Desde luego se reconocen dos clases distintas de cristales: unos pequeños, de caras rugosas, sin brillo, de color pardo rojizo como de chocolate, y que presentan siempre solamente la forma simple del romboedro obtuso. Estos alguna vez están maclados y se les encuentra con gran profusión diseminados en los yesos deleznables de aspecto sacarino antes mencionados. Los otros son generalmente bastante grandes, de forma compuesta en la cual la predominante, que es el romboedro agudo, tiene sus caras muy obscuras, casi negras y bastante lustrosas. Rarísima vez este romboedro agudo se encuentra solo en el cristal, sino que, por el contrario se le observa combinado con el pinacoide básico (0001) quetrunca (h0l) sus dos vértices culmiaantes y cuyas caras son siempre mates. Cuando existen solamente estas dos formas, el cristal puede ser confundido con un octaedro monoclínico constituído por las cuatro caras del clinodomo (0kl) y las cuatro de los hemiortodomos positivo y negativo, no siendo extraño por tanto que D. Amalio

Maestre (*) al describir este mineral incurriese en dicha equivocación. Fué D. Francisco Quiroga (**) quien rectificó tal error determinando la verdadera simetría de la Teruelita. A estas dos formas simples se unen también con gran frecuencia las seis facetas de un romboedro obtuso, considerado por Quiroga como el primitivo $(10\bar{1}1)$ y cuyas caras son mates como las del pinacoide y están colocadas truncando las aristas que sobre el romboedro agudo intercepta dicho pinacoide.

Estos cristales de forma combinada les he encontrado siempre en los yesos compactos y tienen una exfoliación muy manifiesta, según los planos del romboedro obtuso, siendo muy brillante y de color menos obscuro la superficie exfoliada.

Los ángulos del romboedro sencillo de los pequeños cristales no me ha sido posible medirlos por la rugosidad de sus caras pero tanto por el aspecto de ellas como por la forma del romboedro paréceme que es el mismo romboedro obtuso que se halla combinado con el agudo y la base en los cristales grandes.

El obtenido por exfoliación fué medido por Chaves (***) obteniendo un ángulo de 106°12′ que es precisamente el que dan Naumann-Zirkel para la Ankerita (****).

Composición química y génesis.—Partiendo del análisis de la Teruelita que hizo D. Francisco Quiroga, hallándola constituída por el carbonato cálcico magnésico, con pequeña cantidad de hierro é indicios de manganeso y teniendo en cuenta además las circunstancias de su yacimiento, puede conjeturarse como se ha podido formar en los yesos en que se la encuentra. Estos yesos, según la autorizada opinión de D. Daniel Cortazar (*****) y del P. Leandro Calvo (******), se han debido originar por la acción de disoluciones de bicarbonato de cal sobre las de sulfato de magnesia y al formarse así el sulfato de cal hidratado, natural es que también la presencia de la magnesia separada del ácido sulfúrico y el óxido de hierro tan abundante en las rocas triásicas dieran lugar al carbonato de cal, magnesia y hierro constitutivo de la Teruelita.

Otra de las circunstancias que en el yacimiento de este mineral merece mencionarse, es que los cristales de forma simple se encuentren siempre en los yesos sacaroideos y deleznables que son precisamente los más puros, así como las formas combinadas

---

(*) *Anales de minas*, tomo III, pág. 264.—*Geognosia*, de Cataluña y Aragón

(**) Tomo II de los *Anales de la Sociedad Española de Historia natural.*

(***) Tomo XX (1891) de los *Anales de la Sociedad Española de Historia Natural*

(****) *Elementos de Mineralogia*, pág 557.

(*****) Bosquejo físico-geológico y minero de la provincia de Teruel.—*Boletín de la Comisión del Mapa geológico.*—Tomo XII. 1885.

(******) *Geologia de los alrededores de Albarracín*. 1896.

se hallan con preferencia en los yesos margosos consistentes é impregnados de multitud de substancias que los impurifican. Al parecer las materias extrañas interpuestas que colorean las masas yesosas, ha favorecido la aparición y desarrollo de las facetas correspondientes á las distintas formas simples que integran la compuesta de los referidos cristales.

Lugar que debe ocupar en la clasificación.—Amalio Maestre refirió la Teruelita á la Breunerita de Breithaup, pero como esta según los análisis de Stromeyer carece siempre de calcio y Quiroga, halló en la Teruelita una gran proporción de dicho metal se desechó enseguida tal opinión. Chaves, fijándose principalmente en el resultado de la medición goniométrica del romboedro de exfoliación la refiere á la Ankerita de Haidinger, pero hay que tener en cuenta que la composición química esencial de esta especie mineral, es una mezcla isomorfa de carbonatos cálcico y ferroso dominantes y sólo como subordinados y en pequeña proporción entran los carbonatos de magnesio y manganeso, siendo así que en la Teruelita el carbonato magnésico juntamente con el cálcico componen la mayor parte, y el ferroso se encuentra en muy pequeña cantidad. Paréceme en cambio que los caracteres de los ejemplares de que trato coinciden por completo con los que de la variedad *Braunspath* ó espato pardo de Dolomia describe Naumann-Zirkel en sus elementos de Mineralogía. Lo que sucede es que la serie isomorfa de los carbonatos romboédricos por ser tal vez una de las mejor conocidas, se ve en ella que el clásico concepto de las especies mineralógicas, tiende á ser substituído por el de tipos de la serie entre los cuales existen multud de variedades; dejándose el nombre de especie para los grupos de seres vivientes cuyos caracteres se conservan por generación. La denominación de especie es menos impropia al aplicarla á las substancias obtenidas en los Laboratorios, pues su composición y propiedades físicas son más constantes que en las producidas en las complejísimas circunstancias que en la naturaleza concurren.

Diremos por tanto que la Teruelita es uno de los términos intermedios entre los tipos Dolomita y Ankerita de la serie isomorfa de los carbonatos romboédricos.

PEDRO FERRANDO MÁS.

ESTUDIO PRELIMINAR DEL CLIMA DE ZARAGOZA

SEGUNDA PARTE

VAPOR ACUOSO Y CIRCULACIÓN ATMOSFÉRICA

III.—VAPOR ACUOSO

Todo el que conoce algo de Meteorología, aunque solo sea en su parte elemental, sabe la dificultad que existe para la determinación relativamente exacta del estado higrométrico por medio del psicrómetro, instrumento que por sus múltiples causas de incertidumbre requiere más cuidadoso y acertado empleo. Por no haber tenido, tal vez, en cuenta estas dificultades, aparecen como muy erróneas las observaciones psicrométricas de la estación meteorológica oficial durante los años 1865 á 1881, y solo son aceptables las efectuadas en algunos de los años 1882 á 1894.

A esas observaciones pueden unirse las asíduas y cuidadosas del P. Blas Ainsa en los años de 1880 á 88, muy perfectas y dignas de tenerse en cuenta como la parte más principal de los datos compulsados. Con ellos hemos compuesto el cuadro VIII, inserto á continuación, y en cuya última parte figuran los valores promedios de la humedad relativa y tensión del vapor de agua deducidos de las observaciones efectuadas á las 9 am. y 3 pm. en la estación meteorológica oficial durante los años citados. Como estas observaciones no dan los valores medios de la humedad y la tensión diurna, es preciso aplicarles una corrección sustractiva poco importante para la tensión, y otra algo mayor aditiva para la

humedad, según se desprende del examen de las observaciones sextihorarias medias.

VIII.—Evaporación y humedad

	Evaporación diurn. med.	HUMEDAD RELATIVA					TENSIÓN DEL VAPOR					Humedad rel. media.....	Tensión del vapor media.
		3h	9h	15h	21h	Media..	3h	9h	15h	21h	Media..		
Enero.....	1 6	88	86	68	81	81	4.8	4.9	5.5	5.0	5.0	77	5.4
Febrero....	2.4	82	79	55	74	72	5.4	5.7	5.9	5.7	5.7	72	6.2
Marzo.....	3.6	78	70	48	68	66	5.9	6.3	6.3	6.3	6.2	68	7.4
Abril.....	4.9	76	64	46	66	63	6.5	6.9	6.6	6.7	6.7	64	8.3
Mayo.	6 2	73	57	40	60	57	7.9	8.0	7.8	8.3	8.0	60	11.0
Junio.....	7.8	71	56	37	56	55	9.1	9.8	8.9	9.7	9 4	59	13.8
Julio.....	9.1	70	54	32	53	52	11.0	11.5	10.1	11.1	10.9	55	15.0
Agosto.....	8.5	68	55	33	50	51	11.1	11.7	10.4	11.2	11.1	53	14.3
Septiembre.....	6.1	75	65	42	61	61	10.0	10.6	9.7	10.1	10.1	62	12.5
Octubre.....	3.8	78	70	48	67	66	7.7	7.9	7.7	7.6	7.7	66	9.3
Noviembre.....	2.0	85	81	61	79	76	6.3	6.4	7.0	6.5	6.6	77	7.1
Diciembre.	1.3	84	82	65	80	78	4.9	5.0	5.5	5.2	5.1	78	5.7
Año	4.8	77	68	48	66	65	7.5	7.9	7.6	7.7	7.7	66	9.6

Figura también al principio del cuadro la evaporación diurna media, deducida de la observación diaria en la estación oficial durante todo el período de 1865 á 94, con algunas deficiencias que no aumentarán ciertamente la inexactitud de dato tan complejo, que con la humedad relativa y la absoluta, nos permiten juzgar con relativo acierto de la sequedad ó humedad del clima.

En orden á la variación de esos elementos climatológicos, resulta de las observaciones trihorarias verificadas en 1884, que la humedad relativa durante el día, presenta la simple oscilación propia de estas regiones, con un máximo antes de amanecer y un mínimo opuesto hacia la hora de la temperatura máxima, ciclo inverso al de la temperatura diurna y perfectamente justificado por la íntima relación que por esencia tiene la temperatura con la humedad relativa. La amplitud media de esa oscilación es igual á 30, creciendo del invierno al verano y disminuyendo en orden inverso. La tensión presenta también la consabida doble oscilación con sus mínimos antes de amanecer y después de la máxitemperatura, y sus dos máximos, más ó menos acercados según las estaciones y que corresponden hacia las 10^h y 21^h, como término medio, aunque en el invierno se reunen en uno solo lo mismo que los mínimos. Esta oscilación llega á tener en el verano una amplitud de $1^{mm}.5$, siendo menor en el invierno durante el cual excede poco de medio milímetro.

La comparación de las observaciones en iguales épocas de la estación oficial y de las Escuelas Pias, acusan una mayor humedad en el primer lugar, achacable tal vez á la proximidad del río, siquiera la menor confianza de aquellos resultados no permitan afirmarse muy resueltamente en ese sentido.

El examen de los resultados insertos en el cuadro antecedente manifiesta la importancia de las oscilaciones anuales inversas, de la humedad relativa y de la tension, que entre muy apartados límites marchan en sentido contrario del invierno al verano y viceversa. Los meses de Noviembre, Diciembre, Enero y Febrero acusan una humedad relativa entre 70 y 85, con muchos días de 90 y 100. Por el contrario, en los meses del estío la atmósfera está relativamente seca y la humedad media no llega ni á 60.

IX.—Nebulosidad y precipitaciones

	NEBULOSIDAD				DÍAS							DÍAS DE				
	3h	9h	15h	21h	Despejados	Nubosos	Cubiertos	Lluvia mensual	Días de lluvia	Lluvia máxima diurna	Lluvia máxima mensual	Niebla	Escarcha	Nieve	Granizo	Tempestad
Enero	50	60	52	45	10	12	9	19	5	12	64	6	6	1,2	»	»
Febrero	51	59	43	39	11	11	6	22	6	33	91	2	4	1,2	»	»
Marzo	37	46	45	34	11	13	7	23	6	29	86	1	2	0,2	0,2	0,4
Abril	47	53	57	48	9	13	8	36	8	31	106	»	1	0,1	0,6	1,2
Mayo	35	40	44	34	11	14	6	39	9	32	102	»	»	»	0,4	2,4
Junio	31	33	39	30	14	13	3	31	6	28	124	»	»	»	0,2	3,4
Julio	19	16	29	26	18	12	1	18	4	35	63	»	»	»	0,2	4,2
Agosto	16	21	22	25	17	13	1	15	3	34	45	»	»	»	0,2	3,2
Septiembre	32	36	41	30	12	14	4	28	6	37	113	»	»	»	0,1	1,6
Octubre	32	45	47	32	11	15	5	37	6	65	138	»	1	»	0,1	0,4
Noviembre	40	60	45	36	9	12	9	27	7	30	113	2	4	0,1	»	0,2
Diciembre	43	56	45	33	9	13	9	21	5	30	47	6	6	0,7	»	»
Año	36	44	42	34	142	155	68	316	71	65	454	17	24	3,5	2,0	17

El cuadro IX, que antecede, contiene los datos relativos á la nebulosidad, precipitaciones y demás accidentes atmosféricos más ó menos ligados con la humedad atmosférica, y apenas es necesaria explicación alguna, para comprender é interpretar los resultados consignados en sus columnas. Unicamente será bueno advertir, que se consideran como días *despejados* aquellos en que las nubes no cubrían *dos décimas partes* del cielo, como *cubiertos* por el contrario, los que no tuvieron libres de nubes ni esas dos décimas partes, y como *nubosos* los restantes de muy vario grado de nubosidad.

Combinados esos resultados con los de la humedad, tensión y temperatura, se ve fácilmente que Zaragoza es relativamente

húmeda en los meses de Noviembre, Diciembre y Enero, como así lo acusan también las nieblas que en ocasiones excepcionales se estacionan hasta quince y más días consecutivos. Es seco en los meses de Junio, Julio y Agosto, como lo indican la baja humedad relativa, gran evaporación y escasez de lluvias que no sean tormentosas. Y disfruta de un grado medio de humedad en los otros meses del otoño y primavera, más tempestuosos éstos que aquellos. En estas estaciones son en cambio más frecuentes las las lluvias, que alcanzan á 98^{mm} en la primavera y 92^{mm} en el otoño, de los 316^{mm} que en total depositan las nubes durante todo el año.

Finalmente, la nebulosidad ó porción del cielo cubierto por las nubes, decrece del invierno al verano é inversamente, y es sensiblemente más grande de día que de noche, fenómeno de carácter general en climas análogos y de nada difícil explicación.

IV.—CIRCULACIÓN ATMOSFÉRICA

Se refieren los datos que existen para el estudio de los vientos, á la dirección de éstos, observada á las 9^h y 15^h, á su velocidad, medida por el recorrido diurno del molinete de Robinson, y á la fuerza relativa de dicho viento en cada una de las dos observaciones diarias.

X.—Dirección y velocidad del viento

	DIAS DE VIENTO								Velocidad med diurna	Velocidad máx. diurna	DÍAS DE			
	N.	NE.	E.	SE.	S.	SW	W.	NW			Calma.	Brisa...	Viento.	Viento fuerte.
Enero	1	3	2	4	1	2	4	14	240	1092	16	7	5	3
Febrero	»	2	1	4	1	2	2	16	263	847	13	9	4	2
Marzo	1	2	2	6	»	1	2	17	278	972	13	9	5	4
Abril	1	2	1	6	»	2	2	16	307	946	9	9	6	6
Mayo	2	2	1	5	1	1	3	16	262	846	11	11	6	3
Jnnio	1	2	1	6	»	2	2	16	292	1004	10	10	6	4
Julio	1	2	1	6	»	1	2	18	278	846	12	10	5	4
Agosto	1	2	2	9	»	1	2	14	271	996	10	11	5	5
Septiembre	1	3	2	8	1	2	3	10	216	729	16	9	4	1
Octubre	1	3	1	7	1	3	2	13	239	849	15	9	4	3
Noviembre	1	3	1	6	»	2	3	14	206	953	17	8	3	2
Diciembre	»	4	2	5	»	2	3	15	218	979	16	9	4	2
Año	11	30	17	72	5	21	30	179	256	1092	158	111	57	39

Esos datos, en los años de 1880 á 1894, nos han permitido componer el cuadro X, que contiene los valores de la frecuencia relativa de los vientos en cada uno de los meses del año, su velocidad

media y máxima diurna, apreciada en kilómetros, y los días mensuales y anuales de *calma*, *brisa*, *viento* y *viento fuerte*, en que la velocidad diurna es menor, respectivamente, de 200, 400 ó 600 kilómetros, ó mayor que este último número.

De su examen resultan dos consecuencias: la predominancia casi absoluta de los vientos del NW y del SE, aquellos más del doble que éstos, y la velocidad relativamente elevada y frecuente violencia de los vientos, que aún resulta mayor de las observaciones realizadas en el nuevo edificio de la Facultad, tal vez por el mejor aislamiento del Observatorio y sobre todo por su mayor altitud.

La predominancia dicha de los vientos del NW y del SE tiene su explicación en las condiciones geográficas, que hacen á la cuenca del Ebro paso fácil de las corrientes atmosféricas producidas por las contrapuestas condiciones meteorológicas del Cantábrico y el Mediterráneo, y en las condiciones topográficas que tienden, en general, á orientar los vientos del NW al SE ó viceversa. La velocidad relativamente elevada es debida también á esa misma contraposición barométrica citada, y al aumento que una especie de caída por el plano inclinado de la cuenca pueda producir en la velocidad inicial. Algunos días sobre todo, y en algunos de sus momentos, alcanza el viento velocidades de 15^{m} por segundo ó 54 Km. por hora, llegando á las de 5^{m} una cuarta parte de los días del año, como término medio, resultados que claramente manifiestan el marcado carácter *ventoso* del clima.

El estudio de la variación diurna de la velocidad y de la dirección del viento, confirma las consecuencias deducidas de las observaciones en otros lugares. Si mediante las observaciones del P. Blas Ainsa, calculamos las *direcciones medias* del viento, resulta el siguiente cuadrito:

XI.—Dirección media

	3^{h}	9^{h}	15^{h}	21^{h}
Invierno..... ..	W. $\frac{1}{4}$ NW.	W. $\frac{1}{4}$ NW.	W. N. W.	W. S. W.
Primavera.....	W. $\frac{1}{4}$ SW.	NW. $\frac{1}{4}$ W.	NW. $\frac{1}{4}$ W.	SW. $\frac{1}{4}$ W.
Verano.....	W.	NW.	NW.	SW.
Otoño.....	W. N. W.	NW.	NW.	SW. $\frac{1}{4}$ W.

De él se desprende que predominan durante el día los vientos

del NW y que estos vientos tienden hacia el S por la tarde, oscilación que manifiesta la influencia diaria del Sol, cuya acción podemos expresar mediante las componentes que en cada momento del día nos dan, con la dirección media en ese día, una resultante igual á la correspondiente para ese momento. Determinadas esas componentes diurnas para las mismas horas del cuadro anterior, muestran un giro en el mismo sentido que el del Sol, según se desprende del cuadrito siguiente:

XII.—Componentes diurnas

	3h	9h	15h	21h
Invierno.....	NW.	N.	NE. $\frac{1}{4}$ N.	S.
Primavera...	S. $\frac{1}{4}$ SW.	N. $\frac{1}{4}$ NW.	N. $\frac{1}{4}$ NE.	S. $\frac{1}{4}$ SE.
Verano.....	W S W.	NW. $\frac{1}{4}$ N.	E.N.E.	S. $\frac{1}{4}$ SE.
Otoño.....	W. $\frac{1}{4}$ NW.	N.N.W.	N. $\frac{1}{4}$ NE.	S

La velocidad nos muestra también claramente una oscilación diurna, con su mínimo de antes del amanecer y su máximo de entre 9h y 15h, que se acercan tanto más al anochecer cuanto más nos aproximamos á los meses del estío, en los cuales aumenta la velocidad de los vientos nocturnos según claramente se manifiesta en el cuadrito adjunto:

XIII.—Velocidades sextihorarias

	3h á 9h	9h á 15h	15h á 21h	21h á 3h
Invierno...	47	76	63	59
Primavera..	60	84	75	66
Verano.....	64	74	73	72
Otoño.....	46	67	58	52

Finalmente, para apreciar la relación de los vientos con los demás elementos meteorológicos, sirve bastante bien el cuadro XIV, en el cual, por referirse sólo á un quinquenio, debe atenderse más á las variaciones y correlación de los elementos climatológicos, que á sus valores absolutos, no enteramente comparables con los obtenidos en más largo período de observación.

XIV.—Correlación de los elementos meteorológicos

	Vientos..	Presión....	Temperat.ª	Humedad..	Tensión...	Nubes....		Vientos...	Presión...	Temperat.ª	Humedad..	Tensión...	Nubes....	
INVIERNO	N.	749.1	4.5	79	4.8	3.2		N.	743.5	25.4	44	10.7	1.7	VERANO
	NE.	48.2	4 1	86	5.4	5.8		NE.	43.4	23.0	55	11.0	3.0	
	E	47.4	4.0	86	5.5	6.4		E.	43.4	26.6	46	11.1	2.0	
	SE.	45.5	5.4	84	5.8	6.8		SE.	43.0	24.4	54	11.7	3.2	
	S.	45.4	4 4	82	5.2	6.0		S.	42.8	26.8	45	11.2	3.6	
	SW.	46.6	6.5	76	5.5	5.0		SW.	42.7	23.4	53	10.8	3.6	
	W.	47.6	5.6	76	5.3	3.7		W.	44.3	20.4	58	10.1	2.0	
	NW.	48.6	6.4	74	5.1	3.0		NW.	44.7	22.0	51	9.8	1.9	
PRIMAVERA	N.	742.8	14.0	58	6.6	3.0		N.	45.6	13.8	66	8.3	4.1	OTOÑO
	NE.	43.1	13.0	65	6.5	4.2		NE.	44 2	14.4	71	8.6	3.8	
	E.	42.7	13.8	71	7.8	4.7		E.	44.7	14.5	72	8 8	5.0	
	SE.	41.4	14.9	66	7.8	5.8		SE.	41.1	16.1	70	9.4	5.2	
	S.	38.9	14.9	64	7.2	6.8		S.	42.2	14 9	72	8.7	5.1	
	SW.	40.9	13.8	60	7.2	5.4		SW.	44.0	14.0	70	8.3	4.7	
	W.	42.5	12.1	60	6.3	3.5		W.	44.8	12.5	67	7.4	3.1	
	NW.	45.6	13.3	58	6.1	3.2		NW.	45.0	13 5	65	7.4	3.0	

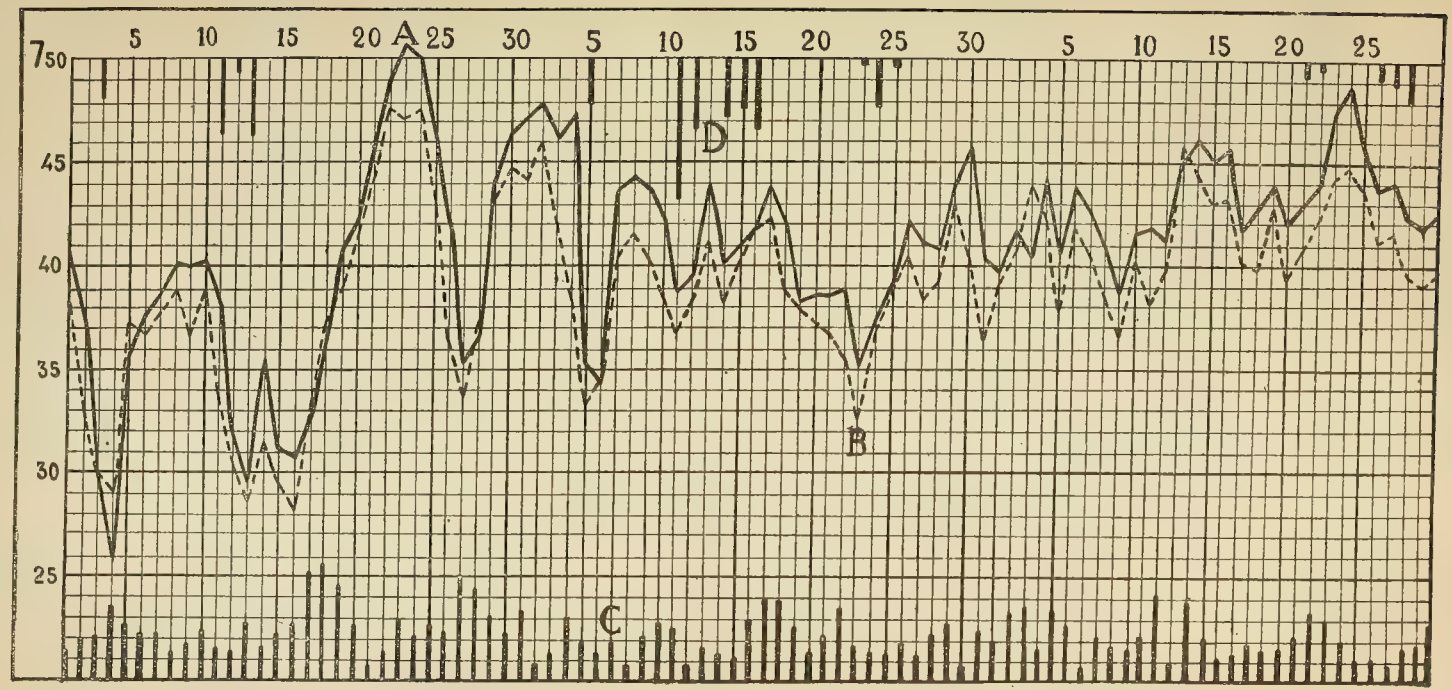
De su examen resulta que los vientos del *cuarto cuadrante* (N al W) correspondientes casi siempre con las presiones más elevadas, son secos y relativamente frescos, excepto en el invierno que son más templados, sirviendo por eso en todo tiempo para mitigar los extremos de la temperatura. Por el contrario los del cuadrante opuesto (S al E) son húmedos, nebulosos y cálidos, excepto en el invierno en cuya estación son relativamente frescos acompañando casi siempre á las nieblas intensas y frías de esa estación; por tal motivo, al contrario de los del cuarto cuadrante, contribuyen á acentuar los extremos de la temperatura.

La explicación de esos hechos puede ser análoga á la de los vientos *foehn* y *mistral*, con los cuales tienen bastante parecido en su origen y desarrollo los vientos *cierzo* y *bochorno* dominantes en estas regiones. Unicamente varían las condiciones climatológicas de las comarcas que atraviesan y las condiciones del relieve, por lo cual son algo diversos los accidentes secundarios de estas corrientes atmosféricas, que compendian é incluyen en sus cualidades las complejidades del brusco clima zaragozano.

GRACIANO SILVÁN.

GRÁFICAS DE LAS OBSERVACIONES DEL SEGUNDO TRIMESTRE

BARÓMETRO, PLUVIÓMETRO, ANEMÓMETRO



Nota.—A. Presión barométrica, á 0° y corregida de capilaridad, á las 9h.
B. » » » » » » á las 15h
C. Camino recorrido por el viento en 24 horas.—1 mm. = 200 km.
D. Agua recogida.—1 mm. = 2 mm. de agua.

ESTACIÓN ME

Observaciones verificadas duran

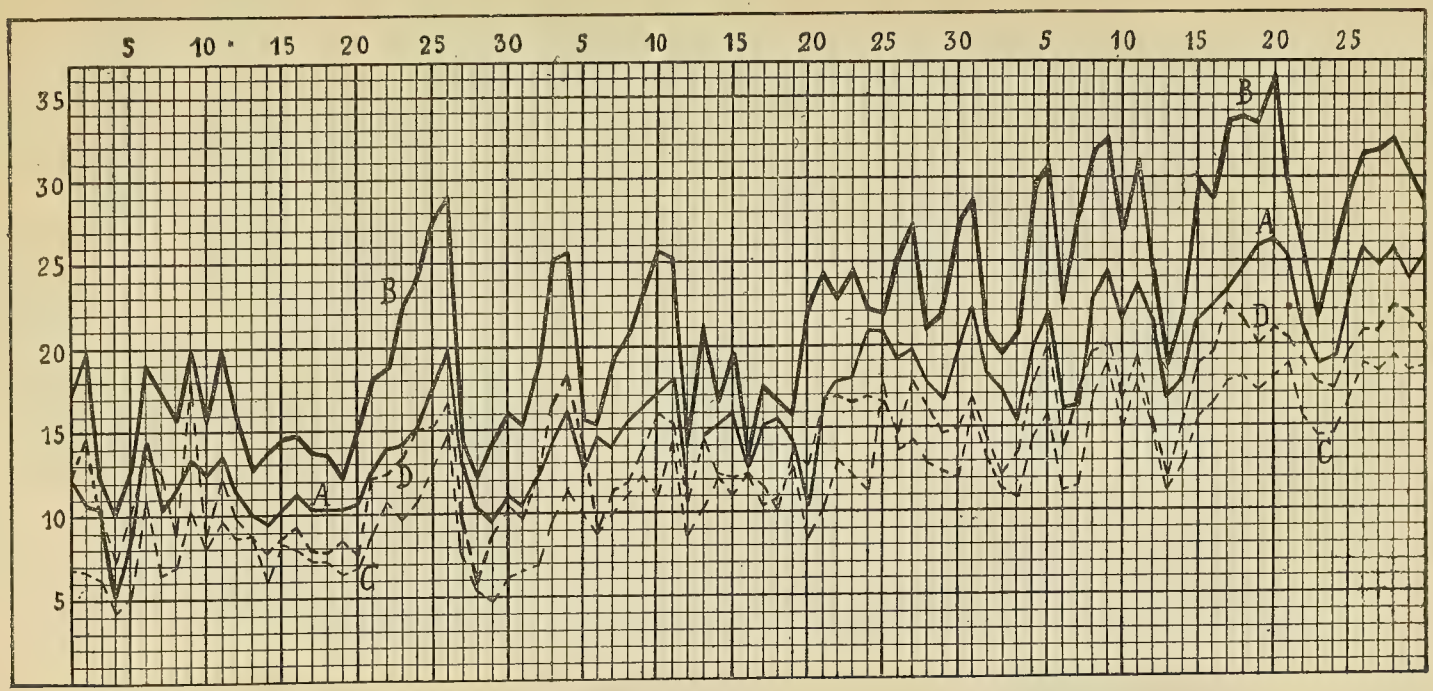
DIAS	ABRIL								MA			
	TEMPERATURA				HUMEDAD RELATIVA		DIRECCIÓN DEL VIENTO		TEMPERATURA			
	MÁXIMA		MÍNIMA						MÁXIMA		MÍNIMA	
	Sol	Sombra	Cubierto	Reflector	A las 9h	A las 15h	A las 9h	A las 15h	Sol	Sombra	Cubierto	Reflector
1	24.8	18.2	3.1	1.4	43	56	ENE	SE	23.2	16.1	6.6	4 2
2	30.4	20.1	5.2	3.6	55	56	NO	SE	27.2	21.4	5.5	3 8
3	19.1	12.5	7.9	5.3	53	76	NO	ONO	32.8	25.9	5.9	3.9
4	18.8	13.2	3.6	1.8	67	76	SO	NO	35.2	26.1	7.4	5.1
5	22.1	14.2	2.6	1.0	59	72	NO	NO	22.6	17 1	10.8	7.5
6	28.6	20.2	7 2	5.0	67	56	NO	NO	31.6	16.7	11.6	8.5
7	26.2	19.4	6.1	4.2	57	56	NO	NO	24.6	20.7	6.0	4.2
8	25.0	16.8	8.5	6.0	48	38	NO	NO	28.5	21.0	9.9	6.8
9	28.9	20.1	5.3	3.2	68	95	SSE	NE	29.7	23.4	7 8	5.2
10	27.8	16.0	9.0	6.8	55	40	NO	N	30.1	25 9	9.1	6.2
11	28.8	21.8	5.1	3.4	61	32	ESE	SE	31 7	25.6	12.5	9.3
12	27.6	17.2	9.5	7.1	68	44	NO	NO	16.8	14.2	10.4	7.6
13	21.6	14.2	5.6	4.2	57	86	ENO	NO	26.9	21.4	7.8	5.6
14	22.0	15.1	5.1	3.2	60	40	NO	NO	28.9	22.0	9 6	7.4
15	21.6	15.1	6.5	4.6	75	44	NO	N	25.1	19.9	9.6	7.2
16	24.0	15 2	4 8	3.2	63	47	NO	ONO	24.8	15.6	11.2	8.8
17	18.9	13.9	5 4	3.2	63	43	NNO	NO	25.5	18.0	9.3	7.2
18	17.7	13.8	5.7	3.2	65	43	NO	NO	25.2	17 6	11.6	8.4
19	19.2	13.8	6.4	4.3	59	59	NO	NO	22.8	16.3	11.5	8.2
20	22.1	15 9	6.9	4 8	50	30	NO	NO	32.8	24.2	6.4	4.2
21	30.2	20.4	2.8	1.2	62	48	NO	NNE	29.2	24.9	9.8	7.2
22	31.6	22.8	4.6	2.4	66	53	ONO	NO	28.4	23.0	11.9	8.7
23	28.0	22.7	5.9	3.5	56	34	NO	NO	30.3	24 7	12.5	9.7
24	33.1	24.8	7.2	7.8	57	36	NO	NO	32.7	23 3	12.5	10.0
25	34.9	29.7	11.4	8.1	56	27	NO	NO	32.3	22.0	12.5	9.4
26	39.8	30.2	12.4	9.2	57	27	NO	ONO	32.4	26.2	12.1	8.9
27	16.9	14 8	10.8	7.9	57	46	NNO	NO	39.4	28.5	14.9	11.4
28	16.8	12.6	4.1	2.8	46	36	NO	NO	31.4	22.3	15.5	11.8
29	19.3	14.6	4.3	2.9	51	48	NO	NO	28.5	22.8	11.2	8.4
30	23.4	17.6	6.5	4.2	48	46	NO	NO	35.6	28 9	9.6	7.2
31									37.1	29.4	12.6	10.2

TEOROLÓGICA

te el primer trimestre de 1907

YO				JUNIO							
HUMEDAD RELATIVA		DIRECCIÓN DEL VIENTO		TEMPERATURA				HUMEDAD RELATIVA		DIRECCIÓN DEL VIENTO	
				MÁXIMA		MÍNIMA					
A las 9h	A las 15	A las 9h	A las 15h	Sol	Sombra	Cubierto	Reflector	A las 9h	A las 15h	A las 9h	A las 15h
59	49	NO	NO	31.7	22 4	15.5	12.7	55	49	SE	NNO
42	44	NO	NO	2.56	20.3	12.2	9.4	56	45	NO	NO
54	40	SE	E	25.6	21.7	11.4	8 2	58	43	NO	NO
55	19	E	S	35.3	30.8	11.3	8.7	56	33	NO	NO
67	86	SE	SE	43.5	31.1	13.1	10.4	52	36	SE	NO
53	43	ONO	OSO	28.5	24.0	11.8	9 3	54	36	NO	NO
60	35	S	ESE	38.8	30.5	11.3	8.4	54	33	NO	NO
67	33	E	OSO	37.8	33.0	13.2	10.1	56	33	SE	E
62	34	SE	SE	39.4	34.1	13.3	10.1	68	33	SE	SE
47	35	SE	SE	39.5	29.0	15.0	11.3	50	35	NO	NO
66	84	SE	SE	37.2	31.1	14.8	11.3	55	33	SE	SE
75	66	SE	SE	33.8	25.2	13.7	11.2	52	36	NO	NO
57	46	SE	SE	31.5	19 0	11.8	8 9	50	44	NO	NO
61	96	NO	NO	29.2	23.3	15.2	11.2	55	50	NO	NO
54	40	NO	NO	38.0	31.3	13.9	10.4	54	34	NO	NO
91	96	NO	NO	42.8	34.1	14.9	11.8	54	40	NO	NO
54	49	NO	NO	45.0	35 3	16.4	14.1	58	37	NO	N
45	49	NO	NO	46.5	36.5	18.1	14 7	54	35	NO	NO
85	78	NO	NO	41.3	35.1	17.5	13.6	40	31	NO	NO
58	33	NO	E	45.4	37 5	16.0	12 8	45	20	SE	NO
41	46	SE	SE	43.1	30.2	16.1	14.2	54	41	SE	SE
57	55	NO	SE	34.6	26.5	16 1	13.2	56	52	NO	NO
57	45	SE	SE	32.6	21.4	12.9	10.2	61	70	NO	NO
58	59	E	SE	36.1	23.5	13.8	11.2	60	41	NO	NO
67	66	NO	NO	37.7	31.1	17.4	14.8	52	40	NO	NO
55	29	NO	NO	40 2	32.1	14.8	11.9	52	36	E.SE	SE
53	38	NO	NO	39.5	32.3	15.3	12.4	53	40	SE	SE
57	60	NO	NO	41 8	32.4	15.4	11.9	53	41	SE	SE
59	53	NO	NO	37.9	31.0	14.7	11.3	57	46	NO	NO
40	26	NO	NO	37.2	28.4	15.1	12 4	52	51	NO	NO
53	29	SE	SE								

TERMÓMETRO



Nota.—A. Temperatura del termómetro seco á las 9ʰ.
B. Idem del termómetro húmedo á las 9ʰ.
C. Idem del termómetro seco á las 15ʰ.
D. Idem del termómetro húmedo á las 15ʰ.

BIBLIOGRAFÍA

Tratado de Mecánica racional, *por D. José Ruiz-Castizo,* Catedrático de la Universidad central.

Hace pocos años, los estudiantes que frecuentaban las aulas de la Facultad de Ciencias habían de servirse necesariamente en el estudio, de libros escritos en idiomas extranjeros; pero el movimiento de publicidad iniciado, les va facilitando medios de estudiar en nuestro propio idioma materias tan interesantes como el Análisis matemático, la Geometría, la Mecánica, la Física y la Química.

Dignas de elogio son siempre estas publicaciones, por sus nobles y desinteresados fines y lo es entre ellas la obra del Sr. Castizo, aparte lo expuesto, por la superioridad de la doctrina, la novedad de los métodos y la elegancia en la exposición.

A reserva de ocuparnos de la obra cuando su publicación se halle terminada, que será la ocasión de hacer una crítica justa, daremos idea á los lectores de lo que el primer fascículo contiene.

En conjunto puede observarse, que la sistematización es constante y bien llevada, y es nuevo y ventajoso, poner los campos vectoriales y la estática gráfica, junto con los conocimientos que generalmente se dan como introducción al estudio de la Mecánica.

Penetrando en los detalles obsérvase: Un modo curioso de presentar el producto vectorial, una expresión original de los momentos en coordenadas cartesianas oblícuas, con interesantes aplicaciones á ejercicios numéricos (hecho que se repite en todo el curso de la obra); la elegante manera de presentar el centro del sistema de vectores paralelos; el constante empleo de los determinantes que tanta elegancia presta á la exposición; la detallada reducción de los sistemas de vectores; el estudio de los sistemas focales, casi nunca incluídos en los tratados de Mecánica; los numerosos ejemplos de centros de gravedad, tan útiles para ejercitar á los alumnos en el desarrollo de integrales definidas; el desarrollo que concede á la Estática gráfica, con todo lo fundamental para la práctica de las ciencias de construcción que se estudian en las Escuelas especialess; interesantes aplicaciones á la cons-

trucción gráfica de cónicas y cuádricas de inercia; un copioso capítulo de ejemplos de momentos de inercia; la exposición de los campos vectoriales, por primera vez expuestos en un libro español de Mecánica; teoremas tan interesantes como los de Green y Stokes, menos conocidos de lo que debieran serlo en nuestras Facultades; su aplicación al campo Newtoniano electrostático, y al de una corriente rectilínea, y la manera original de presentar el cálculo del potencial.

Por lo mucho bueno anotado, que contiene este fascículo, y por el carácter que se le ha dado á la vez teórico y de aplicación, es de esperar que completado forme un excelente tratado de Mecánica racional, de utilidad indiscutible para los estudiantes de nuestras Facultades y para los que cultivan la ingeniería y la arquitectura en las Escuelas especiales.

Nuestro aplauso al Sr. Castizo, que tan alto pone con esta obra el nombre de la literatura científica en nuestra patria.

G. G.

PUBLICACIONES RECIBIDAS

Discurso leído por el Ilmo. Sr. D. José Rodríguez Carracido, el día 16 de Junio de 1907, en la sesión celebrada por la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, con motivo de la solemne primera adjudicación al Excmo. Sr. D. José Echegaray, de la Medalla de su nombre.

Discursos leidos ante la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, en la recepción pública del Excmo. Sr. D. Gustavo Fernández y Rodríguez, el día 29 de Junio de 1907.

Extensión de enseñanza del Instituto de Córdoba.

Folleto 5.º—Nociones de Aritmética y Geometría para uso de albañiles, canteros y oficios similares.—*Ferrer de Oleza F.*

Folleto 6.º (Entrega 2.ª)—Estudio elemental del organismo humano. —*H Pacheco E.*

Journal de Sciencias Mathematiques, Physicas e Naturaes, publicado sob os auspicios da Academia Real das Sciencias de Lisboa. Segunda serie. Tomos I al VII, números I al XXVII.

Observaciones de la Estación Meteorológica de Huesca. Resumen del Año 1906.—*Soler J. P.*

Naturae Novitates. Números 1 al 13. 1907.

Uno Squardo allo sviluppo delle Scienze matematiche nell' evo antico. - *Amodeo F.*

Sumarios de publicaciones periódicas

Madrid.—*Anales de la Sociedad Española de Física y Química. Número 42.*—Acta de la segión del día 8 de Abril.—Notes microphotographiques. *Cajal S. R.*—Sobre la variación del magnetismo permatente con la temperatura. *Cabrera Felipe B.*—La termo-luminescencia de los minerales. *Calafat y León J.*— Algo acerca de la hidrolita. *Prats Aymerich J.*—Experimentos de cátedra: Comprobación de la primera ley de la caída de los cuerpos. *Hausser E.*—Notas alemanas de Física y de Química. *Werner Meklenburg.*

Núm. 33.—Acta de la sesión del día 6 de Mayo.—Notas de óptica. *Mendizabal A.*—Notes microphotographiques. *Cajal S. R.*—Sobre la determinación del llamado espacio perjudicial en el termómetro de aire modelo Jolly. *Terradas E*—Sobre la variación del magnetismo permanente con la temperatura. *Cabrera Felipe B.*—Notas alemanas de Física y Química. *Werner Mecklenburg.*

Núm. 44.—Acta de la sesión del día 3 de Junio.—Sobre algunos fenómenos de polarización en luz convergente observables en láminas de cuarzo dextrogiras, superpuestas, de igual espesor, normales al eje, teniendo intercaladas láminas de mica de $^1/_4$, $^1/_2$, $^3/_8$ ó $^1/_8$ λ. *Terradas E.* —Estudio sobre la valencia química. *Muñoz del Castillo J., Cebrián F., Gallas G* y *Peset J.*—Notas alemanas de Física y de Química. *Werner Mecklenburg.*

Annales de la Faculté des Sciences de l' Université de Toulouse. Tomo IX, 1907. Action d' une masse intramercurielle sur la longitude de la Lune. *Saint-Blancat D.*

Boletín de la Real Soc. Esp. de Historia Natural.—T. VII. Núms. 1-4. —Algunas «Conjugadas de la provincia de Orense». *Bescansa F.*— Nota sobre el origen de la Glauconia. *Chaves y Pérez del Pulgar F.*— Breve noticia de algunos monstruos existentes en el Gabinete de Historia Natural de la Universidad de Oviedo. *De las Barras F.* — Tercera lista de nombres catalanes de hongos (bolets). *Aranzadi T.*—Lista de hongos recibidos en Noviembre de 1906, del Empalme, Martorellas, San Celedoni y Badalona *Aranzadi T.*—Linaria supina mostruosa. *Aranzadi T.*—Sobre los terremotos ocurridos en Alicante el día 23 de Enero de 1907. *Jiménez de Cisneros D.*—Excursiones á las sierras de la Horna, del Rollo y de Crevillente. *Jiménez de Cisneros D.*—Notas para la Flora catalana. *Cadevall y Diars J.*—El «Okapi» del Museo de Madrid. *Cabrera Latorre A.*—Excursión desde el valle del Tajuña al del Tajo *Fernández Navarro L.*—Acción de las soluciones de HONa sobre el

«B. Virgula», el «B. Eberth» y el «Bacterium coli». *Turró. R.*—Los vidrios violados. *Esteva J.*—La «Linaria supina» monstruosa de Badalona. *Esteva J.*—Nota sobre las termo-luminescencia de los minerales. *Calafat y León J.*—Excursiones por el Norte de la provincia de Alicante. *Jiménez de Cisneros D.*—Algunos roedores nuevos de Marruecos. *Cabrera Latorre A.*

Tomo VII. Núm. 5.—Los lobos de España .*Cabrera Latorre A* —La cadena ganglionar de los tentáculos en los Cefalópodos. *Madrid Moreno J,*—Eine neue spanische Acmaeodera. *Reitter E.*—Indicación de algunos peces notables de La Coruña. *Bolivar I.*—El Gault del Hondo de Piqueres. *Jiménez de Cisneros. D.*

Il Bollettino di Matematica.—Núms. 1 y 2. 1907.—Sulle approssimazioni numeriche. *Vannini T.*—Sulla risoluzione dei problemi geometrici col metodo delle equipollenze. *Galvani L.*—Rivista bibliografica. In memoria di Ugo Dainelli. *Frattini G.*

Núms. 3 y 4. 1907.—Sulla risoluzione dei problemi geometrici col metodo delle equipollenze. *Galvani L.*—Sulla divisivilita dei numeri. *Carollo P.*—Sulla divisivilita dei numeri. *Ghezzi T.*—Importanza del calcolo delle espressioni aritmetiche. *Doria G. A.*—In difesa tei teoremi sulla equivalenza delle equazioni. *Ingrami G* —Riduzione di un arco al primo quadrante. *Neppi Modona A.* —Per ricordare le formule di Delambre *Crochi L.*—Rivista bibliografica.

Bulletin international de l' Académie des Sciences de Cracovie.

Núm. 1. Janvier. 1907.— Contribution á la théorie du mouvement des liquides visqueux; en particulier des problèmes en deux dimensions. *Smoluchowski M.*—Sur la condensation de l' acétoguanamine avec des aldéhydes aromatiques. *Humnicki V.*—Anatomie comparée des organes végétatifs des Groseilliéres (Ribes). *Kudelka W.*—Sur la profondeur du temblement de terre de la Calabre du 8 Sept. 1905. *Rudzki M. P.*—La flore fossile sénonienne de Potylicz. *Nowak J.*

Núm. 2. Février. 1907.—Nouvelle preuve de la parenté chimique entre la matiére colorante du sang et la chlorophylle. *Marchlewski L.* —Revue critique de la flore de la Galicie. VIII partie. *Zapalowicz H.*— Sur les rayons cathodiques secondaires. *Laub J.*—Boryslaw. Une monographie géologique. *Grzybowski J.*—Etudes sur les matiéres colorantes des racines de Datisca Cannabina, II. *Korczynski A. et Marchlewski L.*—Sur la préparation artificielle des sérums thérapeutiques *Czajkowski J.*

Núm. 3. Mars 1907.—L' équation biharmonique et une classe remarquable de fonctions fondamentales harmoniques. *Zeremba S.*—Sur la réaction du gaïac et de l' oxihémoglobine. *Bollaud A.*—Sur la nature chimique et la structure de l' amidou. *Jentys E.*

Núm. 4. Avril. 1907.—Revue critique de la flore de la Galicie, IX partie. *Zapalowicz H.*—Sur les microbes anaérobies dans les tissus normaux. *Saski St.*—Sur le développement des sacs limphatiques dans les membres posterieurs de la Grenouille. *Mlle. Gizela Goldflnger.*— Sur les erreurs physiologiques dans les mesures astronomiques faites au moyen de micrometres d' occultation. *Grabowski L.*—Contribution

á l' étude des lois du travail musculaire volontaire. *Piasecki E.*—Sur la théorie électro-magnétique de la dispersion et des l' extinction dans les corps gazeux. *Natanson L.*

Comunicaçôes da Conimissâo do Serviço Geologico de Portugal

Tom. VI. Fasc. II.—Notes sur les Oxynoticeras du Sinémurien supérieur du Portugal et remarques sur le genre Oxinoticeras (deux planches).—Le probleme de la dètermination des directions optiques principales d' un cristal biaxe à l' aide d' observations stauroscopiques (une planche). *Souza-Brandâo V.*- Bibliographie (7.e sèrie). *Choffat P.*

(Palermo). *Il Pitagora.*—Giornale di matematica pubblicato per cura di *Gaetano Fazzari.*

Anno XIII. Núm. 1-2.—Sul quadrangolo piano. *Amaldi I.*—Generalizzazione di teoremi geometrici. *Crocchi L.* — Piccole Note. *Di Dia G.*—Relazioni tra due triangoli. *Mancinelli F.*—Sull' operazione di estrazione di radice «ennesima». *Piccioli E.*—Breve storia dell' Aritmetica e dell' Algebra nei tempi antichi.—Riposte alle quistioni proposte.—Quistioni proposte.

Núms. 3-4-5.—Sull' inutilitá dei Teoremi sulla equivalenza delle equazioni. *Catania S.*—Una propietá della sfera. *D. Italo Amaldi.*—Una dimostrazione dei teoremi di Tolomeo sul quadrilatero inscritto. *Prof. Aldo Finzi.*—Intorno ad una nota costruzione geometrica *Prof. Aldo Finzi.*—La teoria dei numeri reali esposta ai giovani del II Corso d' Istituto Tecnico. *Prof. F. Palatini.*—Sul tetraedro di ugual momento. *Prof. E. Piccioli.*—Risoluzione d' un particolare sistema. *Cutore E.*—Su alcuni criteri di divisibilitá. *Prof. E. Nannei.*—Sulla multiplicazione dei numeri interi *Prof. G Di Dia.*—Proprietá e radici della equazione di 2.° grado dedotte in modo semplice. *Prof. L. Crocchi.*—Condizione sufficiente affinché $n+1$ numeri interi e positivi sieno tali che la somma delle loro potenze p. esime sia la potenza p. esime di un numero intero. *Prof. C. Bianca.*—Osservazioni su alcune formole esprimenti il lato di un poligono regolare. *Guimaraes R.*—Diplomi.—Risposte alle quistioni proposte.—Quistioni proposte.—Breve storia dell' Aritmetica e dell' Algebra nei tempi antichi.

Núms. 6-7.—Tavola degli Elementi relativi alla base 30030 per la rapida ricerca dei fattori primi dei numeri compresi fra 30030 e 510510. *Lebon E.*— Corrispondenza. *Catiana S.*— La teoria dei numeri reali esposta ai giovani del II Corso d' Istituto Tecnico. *Palatini F.*—Sulla risoluzione algebrica di una notevole categoria di problemi sui triangoli piani. *Bassi A.*—Nuova notazione nei problemi dell' Aritmetica pratica.—Risposte alle quistioni proposte.—Quistioni proposte.

Múms. 8-9.—Sull' area del quadrilatero convesso. *Ducci E.*—Una lezione sulla divisione dei numeti interi. *Piccioli E.*—Dimostrazione elementare del Teorema di Taylor.—*Crocchi L.*—Piccole note.—Sulla risoluzione algebrica di una notevole categoria di problemi sui triangoli piani. *Bassi A.*—Tema per concorso.—Intorno un teorema di geometria. *Bellatalla A.*—Rreve storia dell' Aritmetica e dell' Algebra nei tempi antichi.—Risposte alle quistioni proposte.—Quistioni proposte.

Memorias de la Real Soc. Esp. de Historia Natural.—Homenaje á Linneo y Memoria 1.ª.—Homenaje á Linneo en el Segundo Centenario de su nacimiento 1707-1778.—Notas Micológicas (colección de datos referentes á los Hongos de España). *Lázaro é Ibiza B.*

Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid.

Tomo V. Núm. 7 (Enero 1907).—Elementos de la teoría de la elasticidad. *Echegaray J.* — Estudios de Síntesis mineral. *Mourelo J. R.*— Sobre algunos fenómenos de polarización en luz convergente, observables en láminas de cuarzo dextrojiras, superpuestas, de igual espesor, normales al eje, teniendo intercaladas láminas de mica de $^1/_4$, $^1/_2$, $^3/_8$ y $^1/_8\,\lambda$. *Terradas E.*—Ensayo de Geometria analítica noeuclidiana. *Pérez del Pulgar P. J A. S. J.*

Tomo V. Núm. 8. (Febrero 1907).—Elementos de la teoría de la elasticidad. *Echegaray J.*—Estudios de Síntesis mineral. *Mourelo J. R.*— Poliedros regulares. *Catalán L.*—Ensayo de Geometría analítica noeucliniana. *Pérez del Pulgar P. J. A. S. J.*

Revue d' Electrochemie et d' Electro-métallurgie.—Juin 1907. La Société Electrochimique de France.—Electrolyse par courant alternatif. *Hayden J. L. R.*— L'Ozone. *S. B.*—Sur la composition et l' analyse du Wolfram et de la Hübnérite. *Nicolardot P.*—Sur la température de formation des carbures de Strontium et de Baryum. *Morel Kahn.*—Sur la constitutiun et les propiétés des aciers au boro.—*Guillet L.*—Le four électrique au laboratoire et dans l' industrie. *Minet A.*—Sur les changemets des bandes d' absorption des cristaux et la loi de variation de l' amortissement du mouvement des électrons absorbants á diverses températures. *Becquerel J.*—Sur la theorie de Nernst et la mesure des différences de potentiel au contact de deux solutions d' electrolytes. *Guyot J.*— Sociétés Savantes. — Revue des Publications françaises et étrangéres.— Brevets.— Informations. — Bibliographie.— Cote des Valeurs.—Cours des Métaux, Minerais et Alliages.

CRÓNICA CIENTÍFICA

El Centenario de Linneo en España. —Además de enviar á Upsala representantes suyos, la Real Sociedad Española de Historia Natural, la Universidad y el Jardín Botánico de Madrid, y la Real Academia de Ciencias, han conmemorado especialmente el bicentenario del genio botánico, dicha R. S. E. de Historia Natural y la Sociedad Aragonesa de Ciencias Naturales.

La primera rinde homenaje al gran naturalista Carlos Linneo, dedicándole la mayor parte del Tomo V de sus Memorias, en cuyo volumen después de tres artículos de los Sres. Lázaro, Rodríguez Mourelo y Gredilla, que versan respectivamente acerca de *Linneo y su obra*, *Las relaciones científicas de Suecia y España*, y *Linneo y la Botánica en España*, aparecen los autógrafos de dos de las cartas dirigidas por aquel sabio insigne á su discípulo Pedro Loefling cuando estudiaba la flora y fauna española. Siguen á los autógrafos el pasaporte original de Loefling, la recomendación particular del Rector de la Universidad de Upsala, las instrucciones concretas de Linneo á su discípulo, y la reproducción de la interesante relación del viaje de Loefling á España, escrita por el mismo Linneo y traducida al castellano por el sabio naturalista aragonés, Ignacio Jordán de Asso.

La Sociedad Aragonesa de Ciencias Naturales, celebró el 5 de Mayo en memoria del segundo Centenario del nacimiento de Linneo brillantísima sesión pública, que fué presidida por el muy ilustre Sr. Rector de la Universidad, acompañado del excelentísimo Sr. Capitán general y del Sr. Vicepresidente de la Sociedad, asistiendo los Sres. Decanos de Medicina y Ciencias, Presidente de la Academia de Medicina, Sres. Director y Vicedirector del Instituto de segunda enseñanza, muchos Sres. Catedráticos de la Universidad, y socios de la Aragonesa, representaciones de diversos Centros y Corporaciones, y numeroso público que se asoció con entusiasmo al homenaje dispensado al eminente botánico sueco.

Además prepara esa Sociedad y dará muy pronto á luz, un hermoso tomo de más de 500 páginas con muchas figuras, láminas y autógrafos, en el cual se contienen, además de los trabajos leídos en la sesión antedicha, otros muchos en número de 52, que versan

acerca de muy variados asuntos y se ocupan muy principalmente de la vida y trabajos de numerosos naturalistas españoles, que tuvieron por maestro y guía en sus estudios al ilustre sabio en cuyo loor se publica ese volumen.

Los Anales de la Facultad de Ciencias de Zaragoza, se asocian muy entusiastamente á los homenajes todos que la ciencia contemporánea rinde al genio de la botánica, y felicita á las Sociedades que de tal modo saben honrar á los creadores de la ciencia.

El premio de Echegaray fundado por la Real Academia de Ciencias de Madrid.—En honor del ilustre hombre español tan ensalzado en estos últimos tiempos, y para entregar la Medalla Echegaray al sabio con cuyo nombre se exige en fundación imperecedera, celebró dicha R. Academia, el día 16 de Junio último solemne sesión, á la que acudieron los hombres de valer de nuestra patria para rendir al insigne compatricio el tributo de su admiración y respeto.

El académico Sr. Carracido, en brillante discurso que la Academia ha publicado, dió cuenta de la historia literaria y científica del celebrado personaje español, poniendo en realce los merecimientos del propagandista científico y profundo matemático, que desplegando energías incontrastables ha merecido de la España entera alabanzas á su personalidad compleja, tantas veces admirada por la pluralidad de sus aptitudes.

«Esta *R. Academia de Ciencias* - dice al final de su discurso— por los fines de su Instituto, por gratitud al que honró y todavía honra sus publicaciones con frutos valiosísimos de la más substanciosa producción científica, y por rendir el merecido homenaje á quien la enaltece con su glorioso nombre, pensó que nada podía ser más grato á tán eximio cultivador de la Ciencia como tomar su nombre por divisa para estimular y premiar á los que, siguiendo su ejemplo, trabajan con ánimo resuelto en el acrecentamiento de los dominios de la verdad científica.»

«Sois desde este momento, venerado maestro, el fundador de un linaje ennoblecido por los méritos que se cifran en vuestro nombre: linaje cuyos lares solariegos radican en la Academia, que mucho os debe por el brillante concurso que siempre prestastéis á todas sus tareas, y cuyo blasón, aunque no haya de ser exornado con leones rampantes en campos de gules, no por esto dejará de ser ilustre teniendo escrito en el primero de sus cuarteles el nombre de *Echegaray*.»

«¡Ojalá—termina—que en el árbol genealógico de la adjudicación de la Medalla *Echegaray* se inscriba cada trienio un nombre

que rivalice por sus merecimientos con el nombre ilustre genitor!

Tras elocuente discurso de agradecimiento y loor á la ciencia del Sr. Echegaray, pone fin á la solemnidad el Sr. Ministro de Instrucción pública con frases encomiásticas para todos, dando por abierto el concurso del *premio Echegaray*, que la Academia adjudicará cada tres años á cualquier persona de nuestra nación ó extranjera que se hubiese distinguido en grado eminente, á juicio de la Academia, en alguno ó algunos de los trabajos científicos que son objeto de las tareas de esta Corporación, sin excluir á los individuos de la misma ni poner género alguno de restricciones.

El premio consistirá en la entrega de la Medalla de oro con el busto de Echegaray, en sesión pública y solemne que tendrá lugar el 19 de Marzo del año de la adjudicación.

En 17 de Abril pasado, dejó de pertenecer á esta Facultad nuestro querido compañero D. Esteban Terradas é Illa, que después de muy lucidas oposiciones pasó á desempeñar la cátedra de *Acústica y Optica*, en la Universidad de Barcelona.

Alumno primero y muy brillante de las Universidades de Barcelona y Madrid, profesor auxiliar de Física en esta última, y catedrático luego de Mecánica Racional en nuestra Facultad, cuenta ya el Sr. Terradas, en su corta carrera, con muy notables triunfos, y ha realizado una labor que le promete muchos lauros en la Física, á la cual creemos ha de prestar servicios muy valiosos que honrarán á la cieneia española.

En esta Facultad, cuyos profesores festejaron con él merecidos éxitos, deja tantos buenos amigos como compañeros, que conservarán grato recuerdo del que, aunque ausente, sigue colaborando con nosotros en la obra científica á que dedicamos nuestros desvelos.

Se anuncia la publicación de una revista matemática internacional escrita en «esperanto». El nuevo periódico, que se titulará *Gazeta Matematika Internacia*, abarcará todo lo que se relacione con las ciencias matemáticas, lo mismo la teoría que sus aplicaciones, la mecánica, y teorías de la física, problemas, correspondencia, noticias de libros nuevos, una crónica (histórica y biográfica) y traducciones de artículos que hayan aparecido en otras lenguas.

El tamaño y precio dependerán del número de suscriptores. Para el primer año se dará un número de 192 páginas y su precio no excederá de fr. 12,50.

la suscripción y envío de trabajos, dirigirse al Prof. F. J. aes. Rotterdam, Mathenesserlaan, 290.

Otras dos nuevas Revistas han venido á aumentar el número ya no escaso de publicaciones italianas de esa índole. La *Revista di Scienza*, órgano internacional de síntesis científica, aparecerá en Bolonia, dirigida por los profesores G. Bruni, A. Dionisi, F. Enriques, A. Giardina y E. Rignano, y en la que colaborarán los más eminentes autores italianos y extranjeros. Se propone tratar las cuestiones generales relativas á las varias ciencias y á sus relaciones, de un modo fácil y llano, evitando en lo posible el lenguaje técnico, para hacerlas más accesibles á personas de la más varia cultura.

Nuovi doveri, es el título del otro periódico quincenal de problemas educativos, que ve la luz pública en Palermo, y en cuya publicación interviene un grupo de profesores de las escuelas secundarias, cuyo objeto es agitar los problemas más graves de la educación nacional.

Asambleas.—En Parma, tendrá lugar en el próximo Septiembre el primer Congreso de la «Sociedad italiana para el progreso de las Ciencias», para proceder á su constitución y á la formación de sus Estatutos y reglamento.

La nueva Sociedad abarcará en sus trabajos á todas las Ciencias matemáticas, físicas y naturales con sus aplicaciones á la ingeniería y la agricultura, las ciencias médicas y las económicas.

En el mismo mes, del 15 al 20, celebrará también su Asamblea anual la *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, dedicando la II y III sesión á Euler, como matemático, físico y mecánico, y tratando en otras dos muy interesantes cuestiones matemáticas de cuya exposición están encargados varios sabios profesores alemanes.

Establecimiento tipográfico de Emilio Casañal, Coso, 100

SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES
3 9088 01223 8564

e la Redacción y Administración

Los Anales de la Facultad de Ciencias publicarán, además de los sumarios de las revistas y publicaciones recibidas á cambio, una nota bibliográfica de todas las obras de ciencias, de las cuales se envíen dos ejemplares á esta Redacción.

También tendrá mucho gusto la Redacción de los Anales, en publicar los trabajos científicos con que la honren los hombres de ciencia nacionales ó extranjeros, cuya colaboración admitiremos con verdadera complacencia haciendo tirada aparte si así lo desean manifiestamente.

Los antiguos suscriptores de la *Revista Trimestral de Matemáticas* de Zaragoza, serán considerados como suscriptores de los Anales de no manifestar su deseo en contra. Los que no estén conformes con el cambio pueden devolver el número de los Anales á la Administración, calle de D. Alfonso I, 20, librería.